<u>Problem Set</u>

Finanzas II

<u>Ítem 1:</u>

a.- Un agente tiene una función de utilidad media varianza $U = u(r, \gamma, \sigma) = r - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2$. El agente tiene un Gamma de 2. Además, se le ofrece una oportunidad de inversión que ofrece una rentabilidad del 5% con una desviación estándar del 10% ¿Cuál es el nivel de utilidad que le produce al agente tomar esta oportunidad de inversión?

$$U = u(r, \gamma, \sigma) = r - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 = 5\% - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (10\%)^2 = 4\%$$

Extensión: ¿qué nivel de riesgo hace que el portafolio no me genere utilidad?

$$U = r - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 = 0$$

$$\frac{2r}{\gamma} = \sigma^2$$

b.- Un agente tiene una función de utilidad media varianza con un Gamma de 1.5. Además, se le ofrece una oportunidad de inversión que ofrece una rentabilidad del 5% con una desviación estándar del 15% ¿Cuál es el nivel de utilidad que le produce al agente tomar esta oportunidad de inversión?

$$U = u(r, \gamma, \sigma) = r - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 = 5\% - \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot (15\%)^2 = 3.31\%$$

c.- Un agente que tiene una función de utilidad media varianza con un gamma de 2.5. Se le ofrece una oportunidad de inversión que renta un 8% y tiene una desviación estándar del 4% ¿Hasta qué nivel podemos aumentar la volatilidad (manteniendo fija la rentabilidad) para que el agente no decida tomar la inversión (obtenga una utilidad negativa)?

$$U = r - \frac{1}{2}\gamma\sigma^2 < 0$$

$$\sqrt{\frac{2r}{\gamma}} < \sigma$$

$$\sqrt{\frac{2r}{\gamma}} = 25.30\% \rightarrow U = 0$$

Ítem 2:

El instrumento F tiene un rendimiento esperado de 12% y una desviación estándar de 9% anual. El instrumento G tiene un rendimiento esperado de 18% y una desviación estándar de 25% anual.

a.- ¿Cuál será el rendimiento esperado de un portafolio formado por 30% del instrumento F y 70% del G?

$$w_F \cdot E[R_F] + w_G \cdot E[R_G] = E[R_p]$$

$$30\% \cdot 12\% + 70\% \cdot 18\% = 16.2\%$$

$$16.2\% = E[R_p]$$

b.- Si la correlación entre el rendimiento de F y G es 0,2. ¿Cuál será la desviación estándar del portafolio descrito en el inciso a)?

$$\sigma^2 = varianza$$
$$\sigma = desviación\ estandar$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_F^2 \cdot \sigma_F^2 + w_G^2 \cdot \sigma_G^2 + 2 \cdot \rho_{F,G} \cdot \sigma_F \cdot \sigma_G \cdot w_F \cdot w_G}$$
$$= \sqrt{(30\%)^2 \cdot (9\%)^2 + (70\%)^2 \cdot (25\%)^2 + 2 \cdot (20\%) \cdot (9\%) \cdot (25\%) \cdot (30\%) \cdot (70\%)}$$

$$= \sqrt{3.32\%}$$

$$= 18.23\%$$

$$\sigma_P = 18.23\%$$

Extensión: ¿Cómo cambia el riesgo del portafolio si la correlación es 0? (responda solo con intuición)

$$\sigma_P = \sqrt{w_F^2 \cdot \sigma_F^2 + w_G^2 \cdot \sigma_G^2 + 2 \cdot \rho_{F,G} \cdot \sigma_F \cdot \sigma_G \cdot w_F \cdot w_G}$$

Dado que $2 \cdot \rho_{F,G} \cdot \sigma_F \cdot \sigma_G \cdot w_F \cdot w_G > 0$, si $\rho_{F,G} = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 \cdot \sigma_F \cdot \sigma_G \cdot w_F \cdot w_G = 0$ y, por lo tanto, si no están correlacionados. La desviación estándar del portafolio se reduce.

Ítem 3:

Usted posee dos activos financieros caracterizado por:

Activo 1: rentabilidad 12%, desviación estándar 15%
Activo 2: rentabilidad 10%, desviación estándar 10%

a.- ¿Cuál es la rentabilidad y la varianza de un portafolio que invierte el 50% en cada activo? Asuma correlación =0.5

$$w_1 \cdot E[R_1] + w_2 \cdot E[R_2] = E[R_p]$$

$$= 50\% \cdot 12\% + 50\% \cdot 10\%$$

$$= 11\%$$

$$E[R_p] = 11\%$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_1^2 \cdot \sigma_1^2 + w_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho_{1,2} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot w_1 \cdot w_2}$$

$$= \sqrt{(50\%)^2 \cdot (15\%)^2 + (50\%)^2 \cdot (10\%)^2 + 2 \cdot 50\% \cdot 15\% \cdot 10\% \cdot 50\% \cdot 50\%}$$

$$= \sqrt{1.18}$$

$$= 10.90\%$$

Ítem 4:

a.- Usted cuenta con una serie de precios de una acción, se le pide calcular la serie de retornos:

- De forma aritmética
- De forma logarítmica

Periodo	Precio
1	100
2	110
3	105
4	108
5	112
6	108
7	111

Ítem 5:

a.- Explique qué es el CAPM. (hint: $E[R_i] = R_f + \beta \cdot (E[R_m] - R_f)$)

$$E[R_i] = R_f + \beta \cdot (E[R_m] - R_f)$$

$$R_f = tasa\ libre\ de\ riesgfo$$

$$\beta = \frac{cov(R_i, PRM)}{var(PRM)}$$

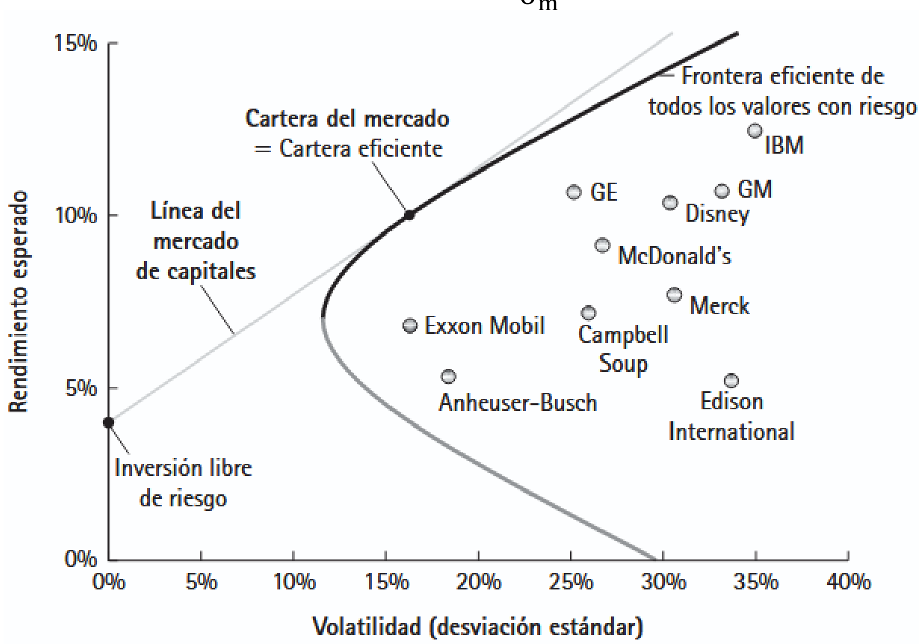
$$(E[R_m] - R_f) = PRM$$

- El CAPM es un modelo de equilibrio general, que se utiliza para valorizar el patrimonio de una firma.

- Valorizar el patrimonio (las acciones) es útil para identificar el retorno de esperado de un activo. También es útil para el calculo del WACC.

b.- Explique la CML. , luego, explique qué pasaría si la varianza del portafolio que está en la CML es igual a la varianza del mercado. Luego, grafique.

$$R_{p(CML)} = R_f + \frac{R_m - R_f}{\sigma_m} \cdot \sigma_p$$



c.- Explique la SML. Luego gráfique.

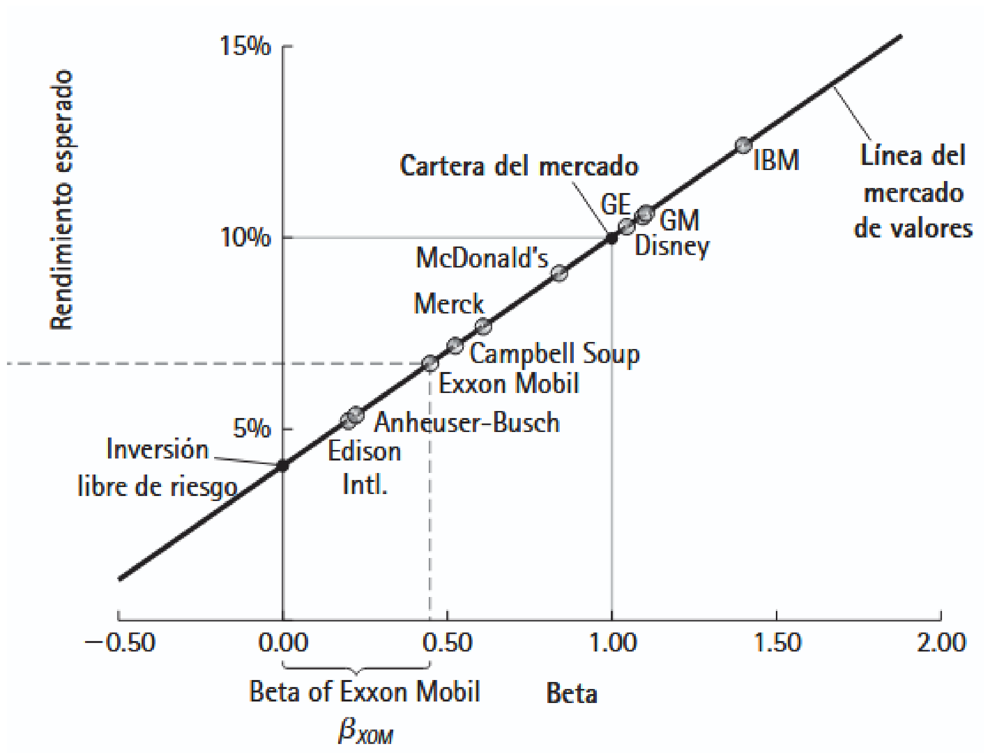
Que es el CAPM (es un modelo) → $E[R_i] = R_f + \beta \cdot (E[R_m] - R_f)$

$$(E[R_m] - R_f) = PRM$$

$$\beta = \frac{\rho_{R_i,PRM} \cdot \sigma_{R_i} \cdot \sigma_{PRM}}{\sigma_{PRM}^2} = \frac{\rho_{R_i,PRM} \cdot \boldsymbol{\sigma_{R_i}}}{\sigma_{PRM}}$$

$$\boldsymbol{SML = E[R_i]\ \forall\ i}$$

$$E[R_i] = R_f + \beta \cdot (E[R_m] - R_f)$$



$$E[R_i] = R_f + \beta \cdot (E[R_m] - R_f)$$

En una economía en la que $R_f = 3\%$, y el $PRM = 3$ grafique la SML e identifique las empresas McDonald y IBM dado que tienen un beta de 0.8 y 1.5 respectivamente.

Asuma $\rho_{R_i,PRM} = 0.7$, $\sigma_{R_{i=IBM}} = 1.7$, $\sigma_{PRM} = 1.5$

$$\beta = \frac{\rho_{R_i,PRM} \cdot \sigma_{R_i} \cdot \sigma_{PRM}}{\sigma_{PRM}^2}$$

Ítem 6:

Actualmente Ud. tiene 10 millones invertidos en dos acciones A y B. Específicamente tiene 3 millones en A y 7 millones en B. Usted además cuenta con la siguiente información

	A	B	C	D
Retorno esperado	15%	17%	20%	5%
Volatilidad	25%	28%	35%	0%

Correlación	A	B	C	D
A		0,4	-0,6	0
B			0,3	0
C				0

a.- Calcule el retorno esperado y volatilidad de su actual inversión

$$E[R_p] = u_p = wu_A + (1-w)u_B = 0{,}3 * 15\% + (1-0{,}3) * 17\% = 16{,}4\%$$

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_A{}^2 + (1-w)^2\sigma_B{}^2 + 2w(1-w)\sigma_A\sigma_B\rho}$$

$$\sqrt{0{,}3^2 * 0{,}25^2 + (1-0{,}3)^2 * 0{,}28^2 + 2 * 0{,}3 * (1-0{,}3) * 0{,}25 * 0{,}28 * 0{,}4} = 23{,}6\%$$

b.- Ud. q**uiere disminuir el riesgo de su cartera lo máximo posible (GMVP)**, reasignando su capital entre los activos A y B. Determine la nueva asignación de su capital, su nueva volatilidad y retorno esperado. ¿Es esta nueva cartera mejor a la anterior en su razón retorno/riesgo?

$$\sigma_p = \sqrt{w^2\sigma_A{}^2 + (1-w)^2\sigma_B{}^2 + 2w(1-w)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

Para obtener el portafolio de mínima varianza (PMV) derivamos respecto a w, de esta forma:

$$\frac{\partial\sigma_p}{\partial w} = \frac{2w\sigma_A{}^2 - 2(1-w)\sigma_B{}^2 + 2(1-w)\sigma_A\sigma_B\rho - 2w\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sqrt{w^2\sigma_A{}^2 + (1-w)^2\sigma_B{}^2 + 2w(1-w)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}} = 0$$

Luego despejamos w óptimo, así:

$$\boldsymbol{w^*} = \frac{\boldsymbol{\sigma_B{}^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}}{\boldsymbol{\sigma_A{}^2 + \sigma_B{}^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}} = 59{,}4\%$$

$$\boldsymbol{w_1^* \rightarrow w_2^* = (1 - w_1^*)}$$

Cantidad para invertir:

$10\ millones * 59{,}4\% = 5{,}94\ millones\ en\ activo\ A\ y\ el\ resto\ en\ B.$

El rendimiento esperado del portafolio de mínima varianza está dado por:

$$E[R_{PMV}] = u_{PMV} = 0{,}594 * 15\% + (1-0{,}594) * 17\% = 15{,}8\%$$

Luego la volatilidad el portafolio de mínima varianza es:

$$\sigma_{PMV} = \sqrt{0{,}594^2 \cdot 0{,}25^2 + (1-0{,}594)^2 0{,}28^2 + 2 * 0{,}594 * (1-0{,}594) * 0{,}25 * ,028 * 0{,}4} = 22\%$$

En la razón retorno riesgo, la cartera en a) es de $\frac{u_p}{\sigma_p} = \frac{16,4\%}{23,6\%} = 69\%$. La nueva razón retorno riesgo de la cartera de mínima varianza es levemente superior $\frac{u_{PMV}}{\sigma_{PMV}} = \frac{15,8\%}{22\%} = 72\%$, esto quiere decir que por cada unidad de volatilidad adicional está entregando un mayor retorno que la cartera calculada anteriormente (la cartera calculada en a).

c.- Suponga ahora que dispone de un cierto capital que desea invertir en C (en D Ud. no dispone de acceso), y que pretende bajar aún más el riesgo obtenido en b. ¿Cuánto debe invertir en C si su objetivo es el mismo que en la parte b (minimizar el riesgo lo máximo posible)? ¿Cuál es la volatilidad y el retorno esperado de esta nueva cartera? Asuma que el monto que debe invertir en activo C es adicional a los 10 millones y que desea mantener la misma cartera de A y B obtenida en la parte b. Hint: Considerar la cartera de A y B como un activo individual.

Sea X la cantidad a invertir en activo C. Previamente encontramos w^*del portafolio de mínima varianza a ser invertido en A y B. Para este caso consideraremos como un sólo activo el portafolio compuesto por A y B obtenido en b).
Previamente nuestro capital disponible eran 10 millones y ahora será de 10+X, de esta forma podemos usar la expresión encontrada previamente:

$$w^* = \frac{Capital\ invertido\ en\ activo\ A\ y\ B}{Cantidad\ total\ de\ recursos\ para\ invertir\ (activos\ A, B\ y\ C)} = \frac{10}{10+X}$$

$$w^* = \frac{10}{10+X} \rightarrow \frac{10}{w^*} - 10 = X$$

$$= \frac{{\sigma_C}^2 - \sigma_C \sigma_{PMV} \rho_{PMV\ C}}{{\sigma_{PMV}}^2 + {\sigma_C}^2 - 2\sigma_{PMV}\sigma_C \rho_{PMV\ C}}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C \sigma_{PMV} \rho_{PMV\ C} &= cov(r_{PMV}, r_C) = cov(0,594 r_A + (1-0,594) r_B, r_C) \\ &= 0,594 cov(r_A, r_C) + (1 - ,0594) cov(r_B, r_C) \\ &= 0,594 \sigma_A \sigma_C \rho_{AC} + (1-0,594) \sigma_B \sigma_C \rho_{BC} \\ &= 0,594 * (-0,0525) + (1-0,594) * (0,0294) = -0,0192\end{aligned}$$

$$w^* = \frac{0,35^2 - (-0,0192)}{0,22^2 + 0,35^2 - 2 * (-0,0192)} = 67,7\%$$

Luego X= 4,777 millones.

El retorno y volatilidad de este nuevo portafolio formado por los 3 activos está dado por:

$$E[R_{PMV2}] = u_{PMV2} = 0,677 * 15,8\% + (1-0,677) * 20\% = 17,2\%$$

$$\begin{aligned}\sigma_{PMV2} &= \sqrt{0,677^2 0,22^2 + (1-0,677)^2 0,35^2 + 2 * 0,677 * (1-0,677) * (-0,0192)} \\ &= 16,3\%\end{aligned}$$

d.- Asuma ahora que tiene acceso a invertir en el activo D. Se sabe que el valor esperado y volatilidad del mercado es de 20% y 25% respectivamente. ¿Qué retorno esperado podría alcanzar en esta nueva situación, si se quiere mantener el mismo riesgo alcanzado en b?

Dado que D es un activo libre de riesgo (tiene volatilidad cero además de nula correlación con los demás activos), la frontera eficiente es la llamada LMC. Que viene determinada por la siguiente ecuación:

$$u_p = r_f + \frac{(r_m - r_f)}{\sigma_m} \cdot \sigma_p = 5\% + \frac{(20\% - 5\%)}{25\%} * 0{,}22 = 18{,}2\%$$

Ítem 7: (Domingo a las 21:00 al correo: jsalinas@uahurtado.cl)

a.- Utilice el modelo CAPM para valorar el patrimonio de la acción de la firma FT a partir del siguiente set de información:

$$\sigma_{FT} = 12\%;\ \sigma_M = 10\%; \rho_{FT,M} = 0.8; rf = 5\%; R_m = 10\%$$

Interprete sus resultados.

b.- Explique intuitivamente por qué el modelo CAPM le permite realizar una buena estimación de la exigencia al patrimonio.

c.- ¿Si la correlación entre el mercado y el activo FT es cero $(\rho_{FT,M} = 0)$, ¿cuál será la exigencia al patrimonio? ¿Es esto razonable?

d.- ¿Cómo cambia el retorno esperado del activo FT si cambia la tasa libre de riesgo?

e.- ¿Cómo cambia el retorno esperado del activo FT si la volatilidad del mercado aumenta (ceteris paribus)?

f.- ¿Cómo cambia el retorno esperado del activo FT si la correlación con el mercado aumenta (ceteris paribus)?