TEORÍA DE CARTERA

Renta Variable

- Instrumentos en que flujos son aleatorios en monto.
- En especifico veremos acciones de empresas.
- El valor de una acción es aleatorio porque las utilidades futuras (en específico, los dividendos) son inciertas.

Renta Variable: Retornos

- Por ahora nos vamos a concentrar en como determinar el Retorno de una acción en un instante t.

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- Cuando Δt es pequeño, se puede aproximar mediante el retorno continuo:

$$r_t \approx \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$$

- Ventajas:
  1. Facilidad de calcular retornos de periodos más grandes (retorno anual= suma de retornos mensuales).

$$r_T = ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) = ln\left(\frac{P_T}{P_{T-1}}\frac{P_{T-1}}{P_{T-2}}\dots\frac{P_1}{P_0}\right) = \sum_{t=1}^{T} ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \sum_{t=1}^{T} r_t$$

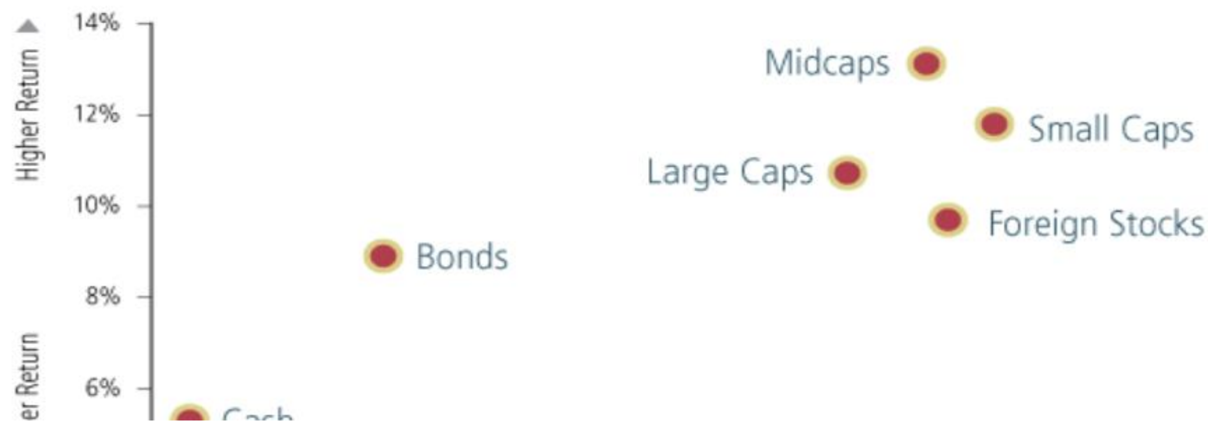
  2. Econométrica: Si se asume que los precios son v.a con distribución log-normal, entonces r_t distribuye normal.

Renta Variable: Selección de Activos

¿Como comparamos los retornos de dos acciones?

Rentabilidad vs Riesgo

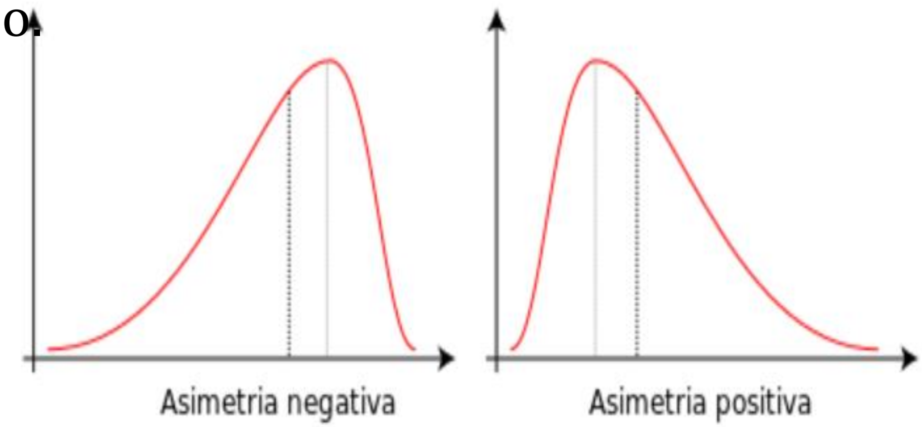
- Como medimos rentabilidad?
  - Podemos usar rentabilidad esperada de Por ley de grandes números (LGN), si r_t son i.i.d luego podemos estimar $E[r_t]$ con el promedio de retornos históricos.
- Como medimos riesgo: Volatilidad
  - Medir la varianza $V(r_t)$ de r_t: Por LGN, podemos estimar $V(r_t)$ con varianza muestral de retornos históricos. Volatilidad es la desviación estándar



Renta Variable: Selección de Activos

El problema de quedarnos sólo con la volatilidad es que omitimos información que si puede ser necesario para comparar riesgo, como:

(1) Asimetría (skewness): Mide si hay más valores por debajo o sobre promedio.

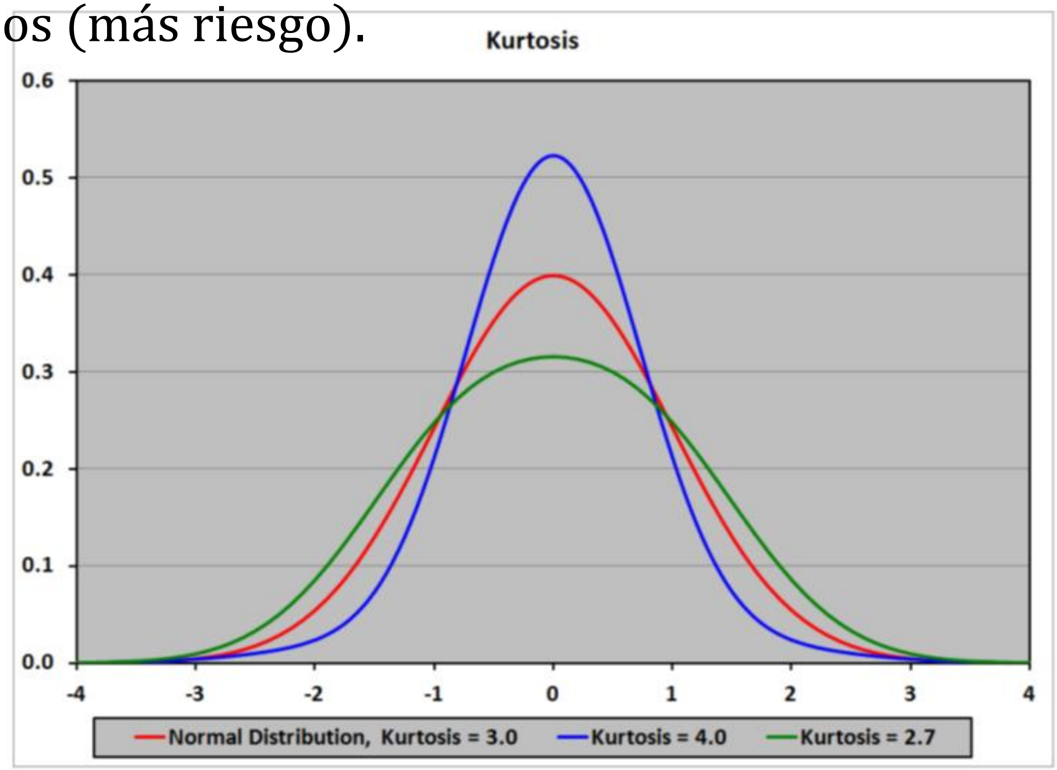


En punteado negro: la media,
En punteado gris: la moda.

- Positiva(Negativa): Mediana esta por debajo(sobre) de promedio
- Si retornos de dos activos tienen mismo promedio y volatilidad, pero distinta asimetría. ¿Cuál es preferible en riesgo?

Renta Variable: Selección de Activos

(Kurtosis): Mide el ancho de las colas en una distribución: Entre mayor es el numero hay más retornos extremos (más riesgo).

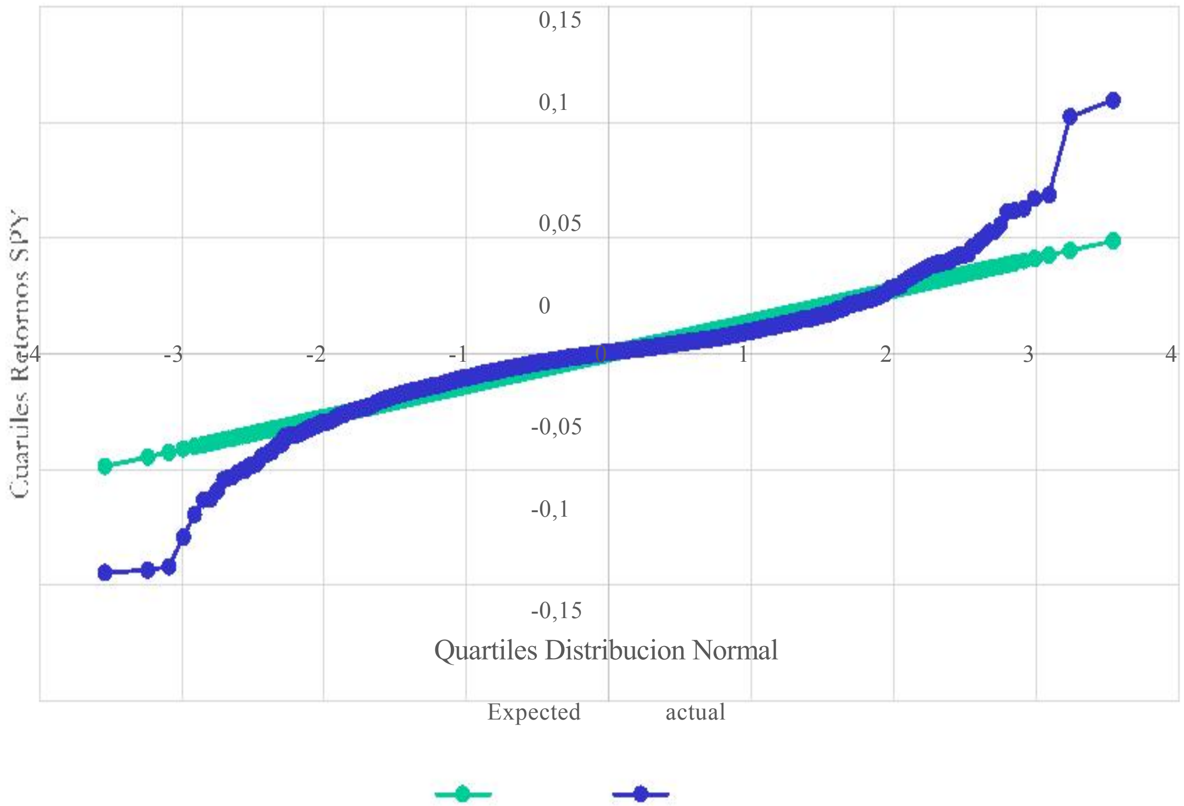


Si suponemos que los retornos siguen una dist. normal, entonces no hay asimetría y la kurtosis es =3.

Luego esta información no es necesaria y podemos trabajar sólo con la varianza.

Renta Variable: Selección de Activos

¿Son los retornos normales?
Ejemplo de los retornos diarios y logaritmicos del SP500 del 2010-2015



QQ plot: Colas de la muestra (azul) son distintas a las colas de una normal (verde)

Asumir que retornos son normales no es un"escandalo" mientras se tenga en cuenta que asimetría y kurtosis no sean tan elevadas.

Ahora asumiremos normalidad.

Hay otras medidas de riesgo, que incorpora información más allá de la volatilidad

Cartera/Portafolio de activos

Cartera (Portfolio) es un conjunto de I instrumentos.

Sea Q_i y P_i la cantidad y valor del instrumento i, entonces el valor de la cartera V_p de I instrumentos es:

$$V_p = \sum_{i=1}^{I} P_i Q_i$$

¿Cual es la retorno de un portafolio r_p ?

$$r_p = \frac{V_p' - V_p}{V_p} = \frac{\sum_{i=1}^{I} P_i' Q_i - \sum_{i=1}^{I} P_i Q_i}{V_p} = \frac{\sum_{i=1}^{I} (P_i' - P_i) Q_i}{V_p}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{I} \frac{(P_i' - P_i)}{P_i} P_i Q_i}{V_p} = \frac{\sum_{i=1}^{I} r_i P_i Q_i}{V_p}$$

$$r_p = \sum_{i=1}^{I} w_i r_i$$

Cartera/Portafolio de activos

$$r_p = \sum_{i=1}^{I} w_i r_i$$

$$E(r_p) = E\left(\sum_{i=1}^{I} w_i r_i\right) = \sum_{i=1}^{I} w_i E(r_i) = \sum_{i=1}^{I} w_i u_i$$

$$= u^T w$$

$$\sigma_p^2 \equiv V(r_p) = V\left(\sum_{i=1}^{I} w_i r_i\right) = \sum_{j=1}^{I} \sum_{i=1}^{I} w_i w_j Cov(r_i, r_j)$$

$$\sigma_p^2 = w^T C w$$

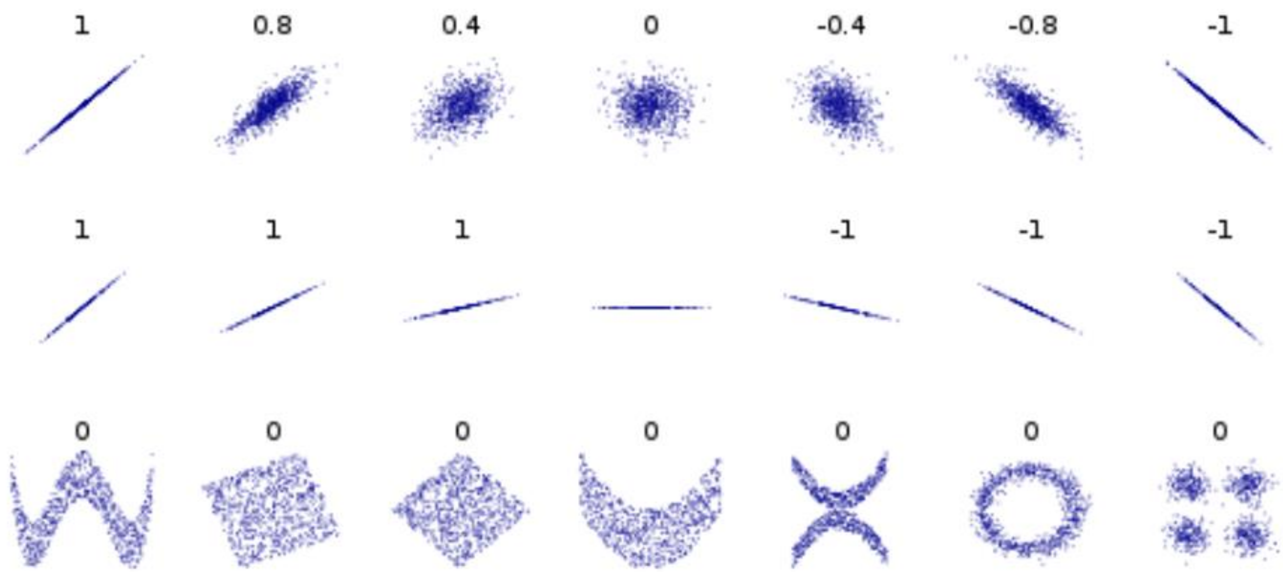
donde C es la matriz de covarianzas de todos los activos de la cartera.

Cartera/Portafolio de activos

Correlación : Medidor de dependencia sin depender de magnitudes.

$$p_{ij} \equiv \frac{Cov(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$

Si los retorno de los activos son independientes, entonces su covarianza (y correlación) es cero.



Cartera/Portafolio de activos

Tarea: Se cuenta con la sgte información:

	Endesa	Copec
Cantidad Acciones	200	200
Precio	$20	$20
Retorno Esperado	10%	15%
Volatilidad Retorno	6%	20%

Se sabe que el coeficiente de correlación de los retornos es 0.5. Estimar

1. Precio de la cartera
2. Retorno esperado y Volatilidad de la Cartera

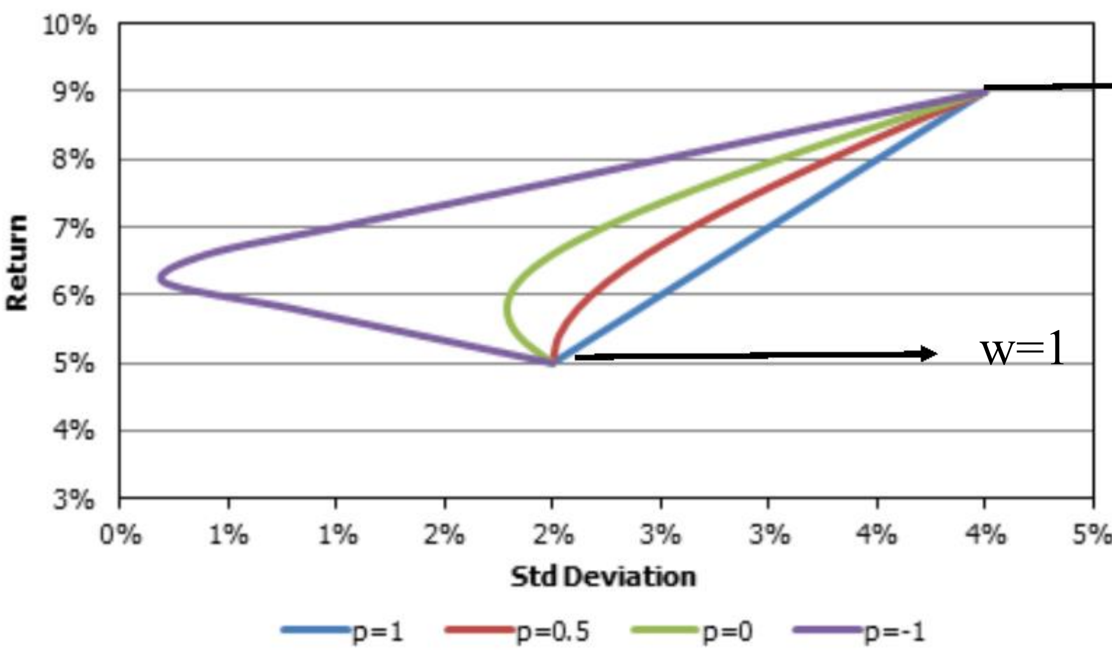
Diversificación de cartera

El retorno esperado y la volatilidad de cartera es una función de los pesos relativos de los activos.
En caso de dos activos: Sea w el peso de activo 1, entonces:

$$u_p(w) = u_1 w + u_2(1-w)$$

$$\sigma_p(w) = \sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 w(1-w)}$$

El grafico retorno/volatilidad con (σ_1, u_1)=(2,6%,5%) (σ_2, u_2)=(4,6%,9%):



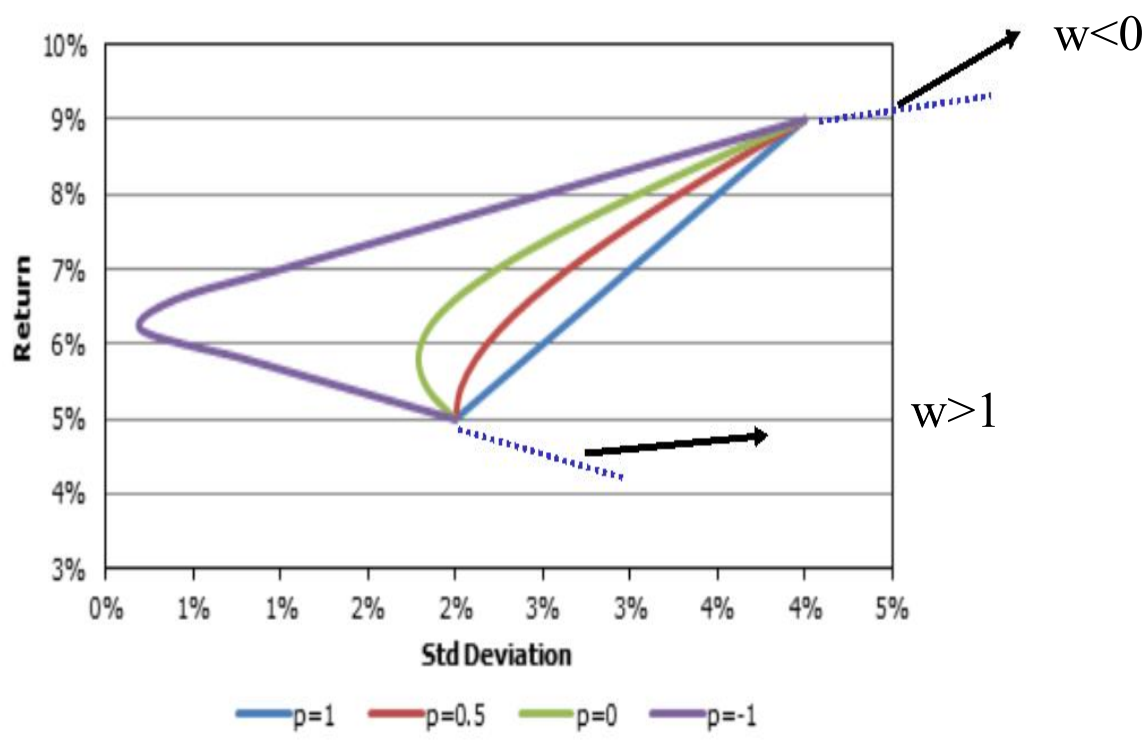
<u>Efecto diversificación:</u>
Entre más negativamente correlacionado los activos más reduzco riesgo, (comparando mismos retornos esperados)

Diversificación de cartera

Los pesos w suman 1 pero pueden ser negativos.
Venta corta (w<0): Significa que se pide prestado un activo para venderlo y recomprarlo en el futuro.
Con signo negativo se recupera el significado de la ganancia de una venta ya que:

$$-r = - (P_{t+1} - P_t)/\,P_t = (P^{venta} - P^{comra})/\,P^{comra}$$

Esto permite expandir las fronteras de retorno volatilidad.
Gráficamente:



Diversificación de cartera

En el caso de más activos también existe efecto de diversificación.
Para verlo, supongamos una cartera de N instrumentos, con $w_i = \frac{1}{N}$

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} Cov(r_i, r_j) = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{N^2} \sigma_i^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1,i \neq j}^{N} Cov(r_i, r_j)$$

Sea $\bar{\sigma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2$ y $\overline{Cov} = \frac{1}{(N^2 - N)} \sum_{i,j=1,i \neq j}^{N} Cov(r_i, r_j)$ (promedios)

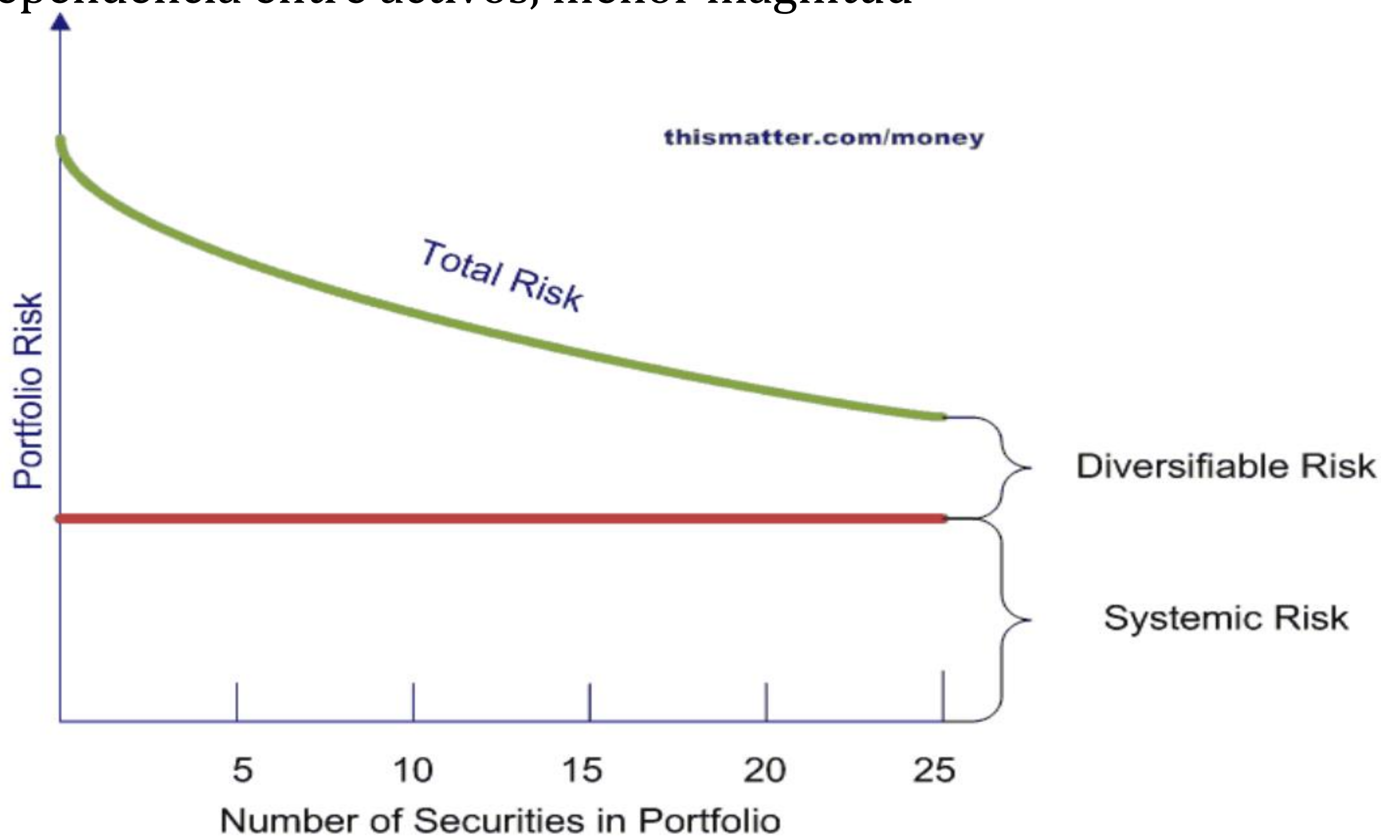
$$= \frac{1}{N} \bar{\sigma} + \frac{1}{N^2} (N^2 - N) \overline{Cov} = \frac{1}{N} \bar{\sigma} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \overline{Cov}$$

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_p^2 = \overline{Cov}$$

En otras palabras, hay un piso para el riesgo de un portafolio, por muy grande que este sea.

Diversificación de Riesgo

- Riesgo Sistemático: Riesgo no posible de reducir mediante diversificación.
- Magnitud riesgo sistemático depende de las correlaciones entre activos.
- Más independencia entre activos, menor magnitud



Frontera Mínima Varianza

- Tenemos N activos riesgosos a disposición, cada uno con un valor esperado y volatilidad conocida.
- ¿Cual es el mejor portafolio para un inversionista que desea una cartera con un retorno esperado de R?
- Si el inversionista es averso al riesgo (es de esperar que lo sea) el problema que debería resolver es:

$$\min \sigma_p^2 = w^T C w$$

$$\text{s.a.} \qquad u^T w = R$$

$$1^T w = 1$$

- La solución de este problema entrega el punto (R,σ_p^2) en gráfico retorno volatilidad.
- La frontera de Mínima Varianza se obtiene resolviendo este problema para distintos targets de retornos R.

Frontera Mínima Varianza

El problema anterior es relativamente fácil de resolver, ya que es convexo.
Por que?

- La función objetivo es convexa (cuadrática) en w debido a que matriz de covarianzas es semi-definida positiva.
- Restricciones de igualdad son lineales en w.

Como es convexo, la solución que cumple condiciones KKT es óptimo del problema.
Recordar Lagrangeano:

$$L = w^T C w + \lambda(u^T w - R\ ) + \rho(1^T w - 1\ )$$

Condiciones KKT son

$$2Cw + \lambda u + \rho 1 = 0 \quad (1)$$
$$u^T w = R \quad (2)$$
$$1^T w = 1 \quad (3)$$

Frontera Mínima Varianza

w,λ , ρ son incógnitas. Nos interesa principalmente w.

- Por (1): $w = -\frac{1}{2}C^{-1}(\lambda u + \rho 1)$ (4)
- Insertar (4) en (2) y en (3). Se obtiene un sistema de 2 ecuaciones para despejar λ y ρ

$$w^* = \frac{\left(R - \frac{b}{c}\right)}{\left(a - \frac{b^2}{c}\right)} C^{-1}\left(u - \frac{b}{c}1\right) + \frac{1}{c}C^{-1}1 \qquad (5)$$

Con $a := u^T C^{-1} u, b := 1^T C^{-1} u, c := 1^T C^{-1} 1$

La función $\sigma_p^*(R)$ (en este caso $\sigma_p^*(u_p)$) es una hipérbola (pg 25 detalles)

- Es insertar (5) en $\sigma_p^{2*}(R)$: $\sigma_p^{2*}(u_p) = w^{*T} C w^*$

Frontera Mínima Varianza

La frontera muestra el retorno y volatilidad de las mejores carteras para cada perfil de inversionista. El perfil lo determina el retorno que éste desea (R's).

- Todo punto a la derecha de la frontera es ineficiente.
- Todo punto a la izquierda es inalcanzable con los activos disponibles.
- Punto en frontera con retorno cartera menor al portafolio mínima varianza también es ineficiente.

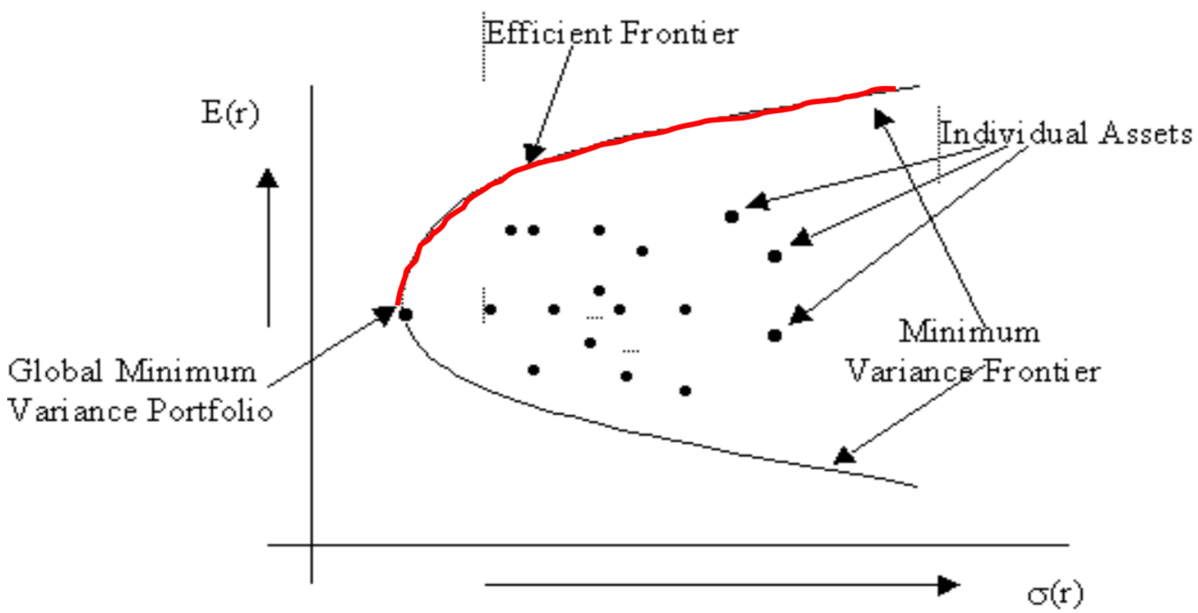
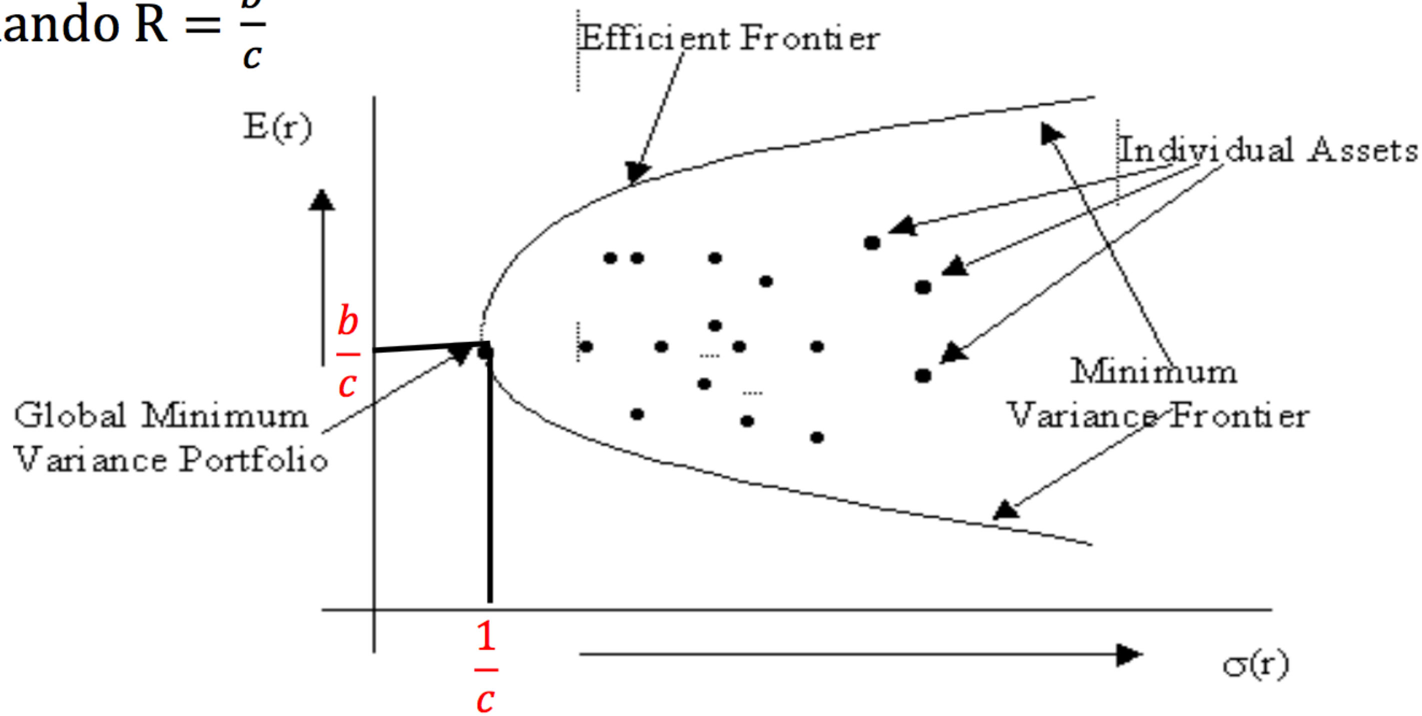


Figure: The Minimum-Variance Frontier of Risky Assets

Portafolio Mínima Varianza

PMV es un punto particular de la frontera: Problema general cuando $\lambda = 0$, i.e. cuando $R = \frac{b}{c}$



Se obtiene resolviendo:

$$\min \sigma_p^2 = w^T C w$$

- Resolviendo

$$w_{min}^* = \frac{1}{c} C^{-1} 1 \, , \sigma_{p_{min}} = \frac{1}{c} , u_{p_{min}} = \frac{b}{c}$$

Frontera Eficiente + Activo libre de riesgo

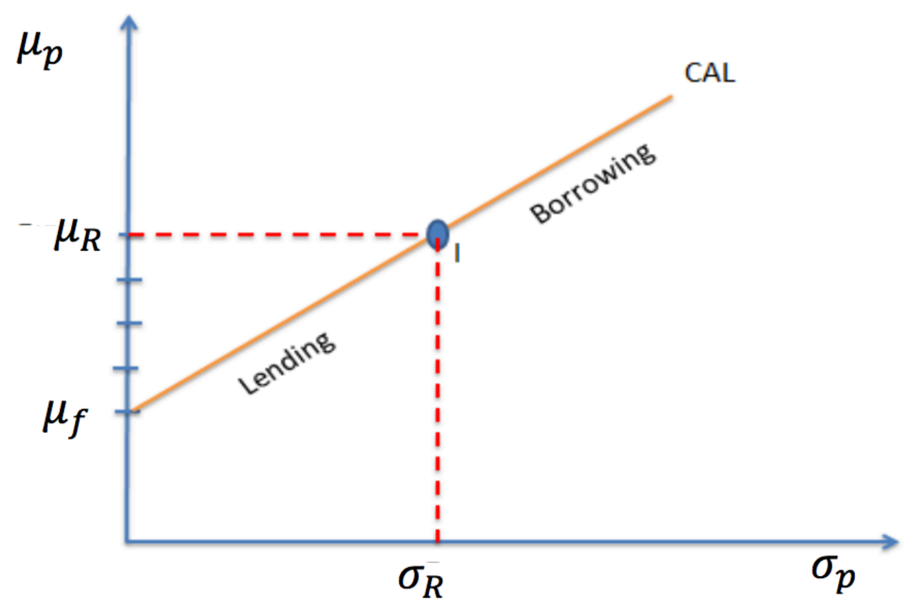
Ya sabemos encontrar portafolios (riesgosos) eficientes.

Agreguemos al análisis la posibilidad real de adquirir activos libres de riesgos (por ejemplo, bonos de Gobierno).

$$\mu_p = w_f r_f + (1 - w_f)\mu_R$$

$$\sigma_p = (1 - w_f)\sigma_R$$

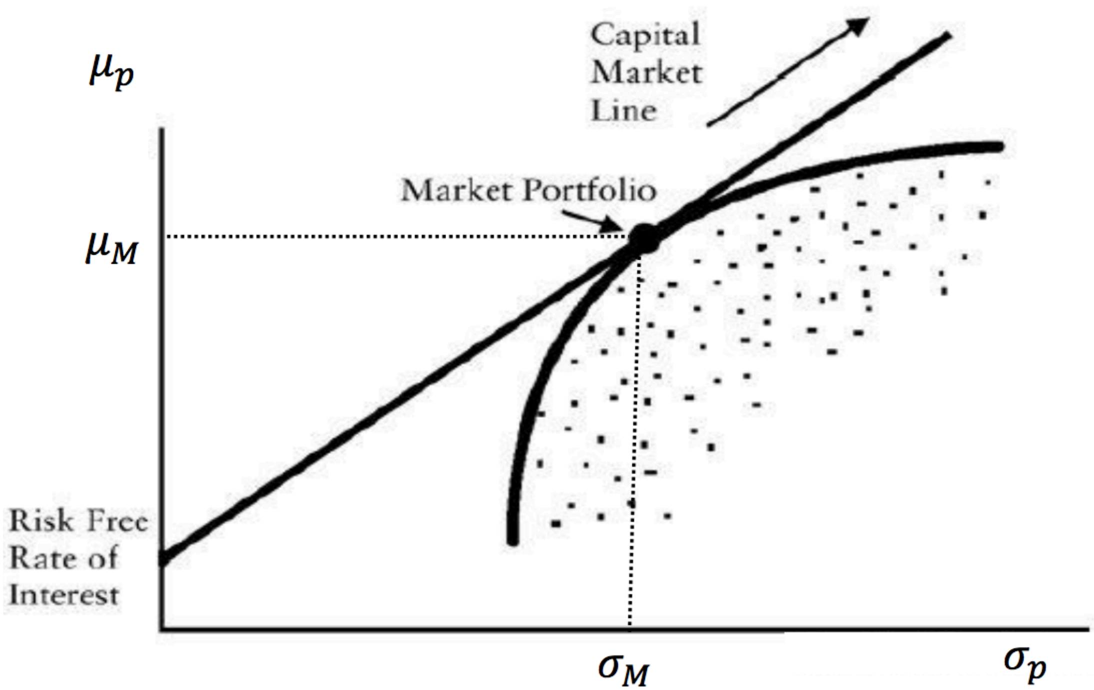
$$\mu_p = r_f + \frac{(\mu_R - r_f)}{\sigma_R}\sigma_p$$



Línea de mercado de capitales (CML)

¿Cual portafolio riesgoso eficiente es la que me entrega mayor eficiencia cuando la combino con activo libre de riesgo?

Respuesta: Cartera de mercado (M)

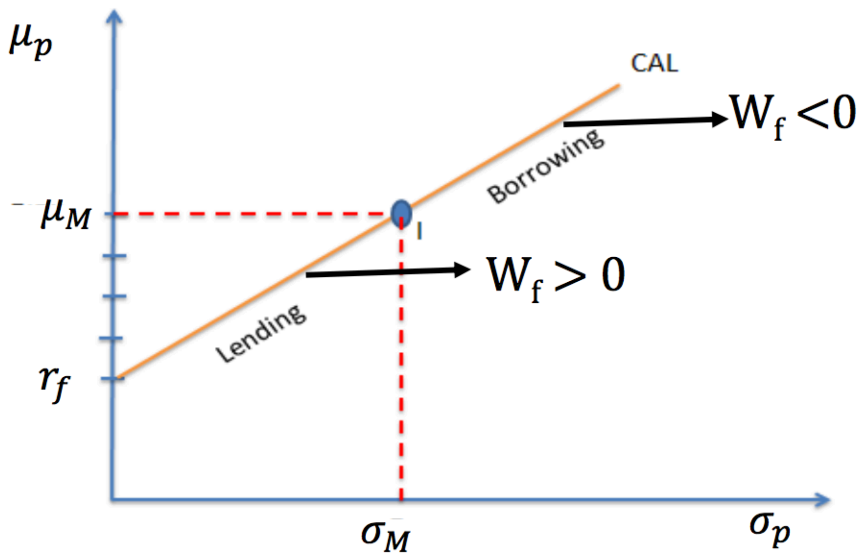


La línea de mercado de capitales corresponde a la nueva frontera eficiente:

$$\mu_p = r_f + \frac{(\mu_M - r_f)}{\sigma_M}\sigma_p$$

Línea de mercado de capitales (CML)

Para obtener un retorno mayor a es necesario ir corto en activo libre de riesgo, es decir pedir prestado (endeudarse) a tasa libre de riesgo.



Línea de mercado de capitales (CML)

Resumen: Cuando se tienen N activos riesgosos y uno libre de riesgo, cualquier inversionista tendrá una cartera P conformada por cartera mercado M y activo libre de riesgo.

Supuestos para llegar a tal conclusión

1. Todos tiene la misma información de los activos:
   - Es decir el retorno esperado, volatilidad, correlaciones tienen el mismo valor para todos los inversionistas
2. Todos resuelven el mismo problema de mínima varianza (Markowitz).
   - Esto asume implícitamente que todos consideran a la volatilidad como única medida de riesgo o en el fondo que los retornos se ajustan a una normal

Línea de mercado de capitales (CML)

Cuál es la cartera de mercado M?

Teóricamente, si un activo no esta en la frontera eficiente, nadie invertiría en él. Por lo tanto, la cartera de mercado serían todos los activos que se usan para invertir (en otras palabras, todos los disponibles).

- Luego la composición se puede determinar viendo el valor de cada activo en el mercado y no sólo por la vía de resolver un problema de optimización ("el mercado ya lo resolvió").

Es decir el valor de la cartera de mercado V_M es $V_M = \sum_{i=1}^{I} V_i = \sum_{i=1}^{I} Q_i P_i$ donde Q_i es la cantidad de acciones del activo i y P_i el precio mercado de la acción.
Por lo tanto, el peso de la acción i en la cartera M es $w_i^m = V_i / V_M$