uah/ Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

PAUTA DE CORRECCIÓN EXAMEN 2 ÁLGEBRA LINEAL
Segundo Semestre 2025

P1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida como $T(u) = \begin{pmatrix} x - 2y + 13z + 4t \\ 2x + y + 11z + 3t \\ -x - 4y + 5z + 2t \end{pmatrix}$.

a) Encuentre la matriz A que representa a T. **(0.5 puntos)**

b) Encuentre el conjunto imagen $Im(T)$. **(0.7 puntos)**

c) Utilizando *b*) decida si T es sobreyectiva. Justifique su respuesta. **(0.3 puntos)**

d) ¿Es T es inyectiva? Justifique su respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución

a) La matriz representante de T es aquella cuyas columnas son $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ y $T(e_4)$ con e_1, e_2, e_3, e_4 los vectores canónicos de $\mathbb{R}^4$.

Luego,

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 13 & 4 \\ 2 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

b) El conjunto imagen de una transformación lineal se define se define como:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(u) : u \in dom(T)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x - 2y + 13z + 4t \\ 2x + y + 11z + 3t \\ -x - 4y + 5z + 2t \end{pmatrix}, \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Ahora se debe verificar si entre los vectores que generan a $Im(T)$ hay uno o más que sean linealmente dependientes respecto a los demás. Para esto, se debe encontrar la forma escalonada reducida de la matriz que representa a la transformación lineal T.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 13 & 4 \\ 2 & 1 & 11 & 3 \\ -1 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3:\, F_3 + F_1}{\overset{F_2:\, -2F_1 + F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 13 & 4 \\ 0 & 5 & -15 & -5 \\ 0 & -6 & 18 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3:\, \frac{1}{6}F_3}{\overset{F_2:\, \frac{1}{5}F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 13 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3:\, F_3 + F_2}{\overset{F_1:\, 2F_2 + F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(0.3 puntos)

Si denotamos por v_1, v_2, v_3 y v_4 las columnas de la matriz A, entonces a partir de su forma escalonada reducida por fila se observa que:

$$v_3 = 7v_1 - 3v_2, \ v_4 = 2v_1 - v_2$$

Es decir, de las cuatro columnas, v_1 y v_2 son L.I, mientras que v_3 y v_4 son L.D. Por lo tanto, la imagen de T está generada por v_1 y v_2. Luego,

$$Im(T) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

c) A partir de *b*) se tiene que

$$ran(A) = 2 \quad \text{o equivalentemente} \quad dim(Im(T)) = 2$$

Por otro lado,

$$dim(Codom(T)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Por lo tanto, como

$$dim(Im(T)) \neq dim(Codom(T)) \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Entonces T no es sobreyectiva. **(0.1 puntos)**

d) T es inyectiva si y sólo si $dim(Ker(T)) = 0$ **(0.1 puntos)**. Pero como $dim(Im(T)) = 2$, en virtud del *Teorema del Rango* se tiene que:

$$\begin{aligned} dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 4 \quad \textbf{(0.1 puntos)} &\implies dim(Ker(T)) = 4 - dim(Im(T)) \\ &\implies dim(Ker(T)) = 4 - 2 \\ &\implies dim(Ker(T)) = 2 \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, T no es inyectiva. **(0.1 puntos)**

P2. Considere el subespacio

$$W = Im(T)$$

donde $Im(T)$ es la imagen de T obtenida en el **Problema 1** letra *b*).

a) Determine una base ortogonal para W. **(0.8 puntos)**

b) Decida si el vector

$$u = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

es ortogonal a cada uno de los vectores de la base obtenida en *a*). Justifique su respuesta. **(0.6 puntos)**

c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base ortogonal de $W = Im(T)$ encontrada en *a*). **(0.3 puntos)**.

d) Justifique que el conjunto propuesto en *c*) es efectivamente una base de $\mathbb{R}^3$. **(0.3 puntos)**.

Solución

Se tiene que

$$W = Im(T) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}\right\}\right)$$

a) Sea $B_o = \{w_1, w_2\}$ base ortogonal de W, donde

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.1 puntos)}\\
w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1\\
&= v_2 - \frac{v_2^\top w_1}{\|w_1\|^2} w_1\\
&= \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}-2 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}}{1^2+2^2+(-1)^2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} - \frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}\\
&= \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{10}{3}\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B_o = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{10}{3}\end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

b) Se debe calcular el producto punto entre el vector u y ambos vectores de la base ortogonal encontrada en *a*) y luego concluir. **(0.1 puntos)**

$$u \cdot w_1 = u^\top w_1 = \begin{pmatrix}-7 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = (-7)(1) + (6)(2) + (5)(-1) = -7 + 12 - 5 = 0 \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

$$u \cdot w_2 = u^\top w_2 = \begin{pmatrix}-7 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{10}{3}\end{pmatrix} = (-7)\left(-\frac{8}{3}\right) + (6)\left(-\frac{1}{3}\right) + (5)\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{56}{3} - \frac{6}{3} - \frac{50}{3} = 0 \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Como $u \cdot w_1 = u \cdot w_2 = 0$, entonces u es ortogonal a cada uno de los vectores de la base obtenida en *a*). **(0.1 puntos)**

c) Una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base ortogonal de W debe ser de la forma

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \quad \textbf{(0.3 puntos)}.$$

Una posible elección para el tercer vector es $u = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ del ejercicio b).

d) Para que un conjunto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sea una base basta que sea linealmente independiente o bien que genere a $\mathbb{R}^3$.

El conjunto

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

es linealmente independiente, pues los dos primeros vectores son linealmente independientes y el tercero, al ser ortogonal a ambos, no pertenece al subespacio que ellos generan. Luego C es una base de $\mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido. **(0.3 puntos)**.

P3. Sean las matrices

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

a) Encuentre la matriz simétrica A cuya factorización esté dada por $PDP^\top$. **(0.8 puntos)**

b) Determine si el vector

$$v = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

pertenece al espacio propio asociado al valor propio $\lambda = -1$. **(0.5 puntos)**

c) Decida si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

"Los vectores propios de la matriz A de la letra a) son ortogonales."

(0.7 puntos)

Solución

a) Se pide calcular $A = PDP^\top$. Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{\top} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.4 puntos)}} \\
&= \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.4 puntos)}}
\end{aligned}
$$

b) El espacio propio asociado a $\lambda = -1$ está generado por la primera columna de la matriz P. Es decir,

$$
E(\lambda = -1) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}\right) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.2 puntos)}}
$$

Por otro lado, como

$$
v = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.2 puntos)}}
$$

Entonces

$$
v \in Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.1 puntos)}}
$$

c) Si A es una matriz simétrica, entonces los vectores propios asociados a valores propios distintos son siempre ortogonales. En este caso,

$$
E(\lambda = -1) = Gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}, \qquad E(\lambda = 3) = Gen\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right\}.
$$

Por lo tanto, pueden tomarse como vectores propios

$$
u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.3 puntos)}}
$$

asociados a $\lambda = -1$ y $\lambda = 3$, respectivamente. Estos vectores son ortogonales dado que

$$
u_1 \cdot u_2 = u_1^{\top} u_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0 \quad \textcolor{blue}{\textbf{(0.3 puntos)}}
$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera. **(0.1 puntos)**