uah / Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

# PAUTA CORRECCIÓN EXAMEN ÁLGEBRA LINEAL
## Segundo Semestre 2025

**P1.** Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida como $T(u) = \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ x-y+8z \\ -2x+5y-z \end{pmatrix}$.

*a*) Encuentre la matriz $A$ que representa a $T$. **(0.3 puntos)**
*b*) Determine si $T$ es inyectiva. Justifique su respuesta. **(0.7 puntos)**
*c*) Encuentre el conjunto imagen $Im(T)$. **(0.7 puntos)**
*d*) Utilizando *c*) decida si $T$ es sobreyectiva. Justifique su respuesta. **(0.3 puntos)**

## Solución

*a*) La matriz representante de $T$ es aquella cuyas columnas son $T(e_1), T(e_2)$ y $T(e_3)$ con $e_1, e_2$ y $e_3$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Luego,

$$A = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

*b*) Una transformación lineal

$$T \quad \text{es inyectiva} \Longleftrightarrow \dim(Ker(T)) = 0 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Buscamos el núcleo o kernel de $A$. Para esto se resuelve el sistema homogéneo $Av = 0$. Escalonando la matriz $A$ se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)} \Longrightarrow \quad ran(A) = 2 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Por el Teorema del rango,

$$dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 3 \Longleftrightarrow dim(Ker(T)) + ran(A) = 3 \Longleftrightarrow dim(Ker(T)) = 3 - 2 = 1 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Como $dim(Ker(T)) = 1 \neq 0 \Longrightarrow T$ no es inyectiva. **(0.1 puntos)**

*c*) El conjunto imagen de una transformación lineal se define se define así:

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{T(u) : u \in dom(T)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x-2y+3z \\ x-y+8z \\ -2x+5y-z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Gen\left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.3 puntos)} \end{aligned}$$

Pero los tres vectores son L.D, en efecto:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto,

$$Im(T) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

*d*) Tener presente que una transformación lineal

$$T \quad \text{es sobreyectiva} \Longleftrightarrow \dim(Im(T)) = dim(Codom(T))$$

Como

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

es un conjunto generador de la imagen y además es L.I por contener dos vectores ninguno múltiplo escalar del otro, entonces es una base para $Im(T)$ **(0.1 puntos)**.

En consecuencia,

$$dim(Im(T)) = 2 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Finalmente, como

$$dim(Im(T)) = 2 \neq 3 = dim(Codom(T)) = dim(\mathbb{R}^3) \Longrightarrow T \quad \text{no es sobreyectiva} \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

**P2.** Sea $W$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*a*) Determine una base ortogonal para $W$. **(0.7 puntos)**

*b*) Determine la proyección ortogonal del vector $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre $W$. **(0.7 puntos)**

*c*) Muestre una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base ortogonal de $W$ encontrada en *b*). **(0.6 puntos)**

## Solución

*a)* Sea $B_o = \{w_1, w_2\}$ base ortogonal de $W$, donde

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.1 puntos)} \\
w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \\
&= v_2 - \frac{v_2^\top w_1}{\|w_1\|^2} w_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B_o = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

*b)* La proyección ortogonal del vector $u$ sobre $W$ viene dada por

$$P_W(u) = \sum_{i=1}^{2} \frac{u \cdot w_i}{\|w_i\|} w_i = \frac{u \cdot w_1}{\|w_1\|} w_1 + \frac{u^\top w_2}{\|w_2\|} w_2 = \frac{u^\top w_1}{\|w_1\|} w_1 + \frac{u \cdot w_2}{\|w_2\|} w_2 \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

- $$\frac{u^\top w_1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

- $$\frac{u^\top w_2}{\|w_2\|} w_2 = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{4}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego, la proyección ortogonal del vector $u$ sobre el espacio $W$ es la suma de estos dos últimos vectores. Es decir:

$$P_W(u) = \sum_{i=1}^{2} \frac{u \cdot w_i}{\|w_i\|} w_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

*c)* Una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base de $W$ debe ser de la forma:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} \quad \textbf{(0.3 puntos)}.$$

donde $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ debe ser **cualquier vector** de $\mathbb{R}^3$ **linealmente independiente** con los otros dos.

El estudiante debe demostrar que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea efectivamente l.i con los restantes de modo que el conjunto $B$ sea efectivamente una base de $\mathbb{R}^3$ **(0.3 puntos)**.

Esto se puede realizar de múltiples formas. Algunas de ellas son:

- Verificar que el determinante de la matriz cuyas columnas son los tres vectores sea diferente de cero.
- Verificar que el rango de la matriz cuyas columnas son los tres vectores sea igual a 3.

**P3.** Considere la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

cuya diagonzalización ortogonal es $A = PDP^\top$ con

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

*a*) Enuncie el Teorema Espectral para matrices simétricas y utilícelo para justificar la existencia de la matriz ortogonal $P$ y diagonal $D$ tales que $A = PDP^\top$. **(1 punto)**

*b*) Determine el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 3$ utilizando la información contenida en la matriz $P$. **(0.4 puntos)**

*c*) Determine el complemento ortogonal del espacio propio correspondiente a $\lambda = 3$. **(0.6 puntos)**

## Solución

*a*) Teorema espectral para matrices simétricas:

> Sea $A$ matriz $n \times n$. Entonces, $A$ es simétrica si y sólo es es ortogonalmente diagonalizable. **(0.5 puntos)**.

Como $A = A^\top$ entonces es simétrica y por tanto es ortogonalmente diagonalizable. Esto significa que existe una matriz ortogonal $P$ y una matriz diagonal $D$ tales que $A$ puede factorizarse como $A = PDP^\top$. **(0.5 puntos)**.

*b*) El valor propio $\lambda = 3$ aparece en la primera columna de la martriz $D$ y por tanto, un vector propio asociado a él aparece también en la primera columna pero de la matriz $P$. Entonces,

$$E(\lambda = 3) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) \textbf{ (0.4 puntos)}.$$

*c*) Como $A$ es una matriz simétrica entonces vectores propios asociados a valores propios distintos son siempre ortogonales. **(0.3 puntos)**.

Por lo tanto,

$$\Big(E(\lambda = 3)\Big)^\perp = E(\lambda = -1) \quad \textbf{(0.3 puntos)}.$$