

# MATRICES SIMÉTRICAS

Seo A matriz  $n \times n$ ,  
A se dice SIMÉTRICA  
si  
$$A = A^T$$

Ej: 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es SIMÉTRICA y

QUE 
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

TEOREMAS: Si A es

SIMÉTRICA, ENTONCES:

(1) LOS VALORES PROPIOS  
✓  $\lambda \in A$  SON N° REALES.

(2) VECTORES PROPIOS  
ASOCIADOS A VALORES  
PROPIOS DISTINTOS  
SON SIEMPRE ORTOGON-  
ALES.

EJ:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

ES SIMÉTRICA Y

QUE  $A = A^T$

\* CÁLCULO  $\lambda \in$  VALORES  
PROPIOS:

$$\mathcal{J}_{ET}(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1 - \lambda)(-2 - \lambda) - (2)(2) = 0$$

$$\Rightarrow -2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$\Rightarrow$  Los valores propios

Sol:  $\lambda = -3 \wedge \lambda = 2$

(2) Cálculo de vetores  
próprios.

$$E(\lambda = -3) = \text{KER}(A - (-3)I)$$

$$A - (-3I) = A + 3I$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{F}_1 \longleftrightarrow \overline{F}_2$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{F}_2 : -2\overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

$\sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore E(\lambda = -3)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; 2x + y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; y = -2x \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v_1 \text{ VECTOR PROPIO.}}; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$v_1$  VECTOR  
PROPIO.

$$E(\lambda = 2) = \text{GEN} \left( \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{v_2 \text{ VECTOR PROPIO}} \right)$$

$v_2$  VECTOR  
PROPIO

NOTA QUE :

$$V_1 \cdot V_2 = V_1^T V_2$$

$$= (1 \quad -2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1)(2) + (-2)(1)$$

$$= 2 - 2$$

$$= 0$$

$\therefore V_1$  y  $V_2$  son

ORTOGONALES //

# MATRIX ORTOGONAL

DEF: Sea  $U$  MATRIX

$n \times n$ . Si  $U$  TIENE

COLUMNS ORTHONORMALES,

$U$  SE DICE MATRIX

ORTOGONAL.

EJ:  $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

ES ORTOGONAL.

E4 EFECTO:

$$\text{SEDH} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$y \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$u_1 \cdot u_2 = u_1^T u_2$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= 0$$

$y$  is orthogonal:

$$\|u_1\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1.$$

$$\therefore \|u_1\| = 1.$$

ANALÓGAMENTE, SE

OBTIENE QUE  $\|u_2\| = 1$

CON Conclusión:

U ES ~~ORTO~~ CONJ.

TEOREMA: Seja  $U$

matriz ortogonal,  
então  $U^T = U^{-1}$ :

$$U \cdot U^T = I$$

ES  $U^{-1} = U^T$ :

$$U^{-1} = U^T$$

---

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ ES}$$

~~DATA CONTROL~~, POR

TAMPO:

$$\underline{\underline{U^{-1} = U^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}}$$

---

Definición: UNA MATRIZ

CUALQUIERA A ES

DISCONECTABLE

DATA CONTROLMENTE

Si EXISTE UNA

MATRIZ  $P$  INVER-  
TIBLE ORTO GONAL

$\gamma$  UNA MATRIZ

DISGONAL  $\rightarrow$  TAL QUE:

$$A = P \cdot \underset{0}{\gamma} \cdot P^{-1}$$

$$A = P \cdot \gamma \cdot P^T$$

EJ:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

ES DISGONALIZABLE

ORTOGONALMENTE,

YS QUE  $A$  PUEDE

Factorizada se como:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

Con  $P$  matriz  
ORTOGONAL.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} //$$

TEOREMA ESPECTRAL

Sea  $A$  matriz  $n \times n$ .

$A$  ES SIMÉTRICA  $\iff A$  ES ORTOGONALMENTE DIAGONALIZABLE

# DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Sea  $A$  SIMÉTRICA, ES  
DECIR EXISTE MATRIZ  
ORTOGONAL  $Q$   
MATRIZ DIAGONAL  
TA QUE

$$A = Q \cdot \Lambda \cdot Q^{-1}$$
$$= Q \cdot \Lambda \cdot Q^T$$

Donde:

$$P = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n)$$

SoH LOS Columns

$\mathbb{R}^n$   $P$

$$P^T = \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$$

EH TOH CES:

$$A = P \cdot \Lambda \cdot P^T$$

$$= (u_1 \dots u_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}}_{n \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}}_{n \times n}$$

$$= \left( \lambda_1 u_1 \quad \lambda_2 u_2 \dots \lambda_n u_n \right) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$$

EN  $\mathbb{R}^n$  SE MECH :

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \dots + \lambda_n u_n u_n^T$$

↳ ES LA

DESCOMPOSICIÓN

ESPECTRAL

DE  $A$ .

EJ: EN CUENTRE UNA

MATRIZ  $A$   $2 \times 2$

CON VALORES PROPIOS

$$d_1 = 3 \text{ y } d_2 = -2$$

CON VECTORES PROPIOS

CORRESPONDIENTES

$$v_1 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}, \quad v_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Sol: POR LO

DESCOMPOSICIÓN  
ESPECTRAL DE  $A$ :

$$A = d_1 u_1 u_1^T + d_2 u_2 u_2^T$$

Сон  $u_1$   $\varphi$   $u_2$   $LOS$

Columns  $J_e$   $LO$

Matrix  $P$  ~~DEE~~

Discovered ORTO-

CONJUGATE  $\delta$   $LO$

Matrix  $A$ .

$$P = [u_1 \quad u_2]$$

Сон  $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2$$

Como  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

$$\therefore u_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{5}$$

FINALMENTE :

$$A = \underbrace{d_1 u_1 u_1^T}_{(*)} + \underbrace{d_2 u_2 u_2^T}_{(**)}$$

Calculo de (\*)

$$d_1 u_1 u_1^T = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$$

Calculo de (\*\*)

$$d_2 u_2 u_2^T = -2 \cdot \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 16/25 & -12/25 \\ -12/25 & 9/25 \end{pmatrix}$$

$$A =$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 9/25 & 12/25 \\ 12/25 & 16/25 \end{pmatrix}$$

$$-2 \begin{pmatrix} 16/25 & -12/25 \\ -12/25 & 9/25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{27 - 32}{25} & \frac{36 + 24}{25} \\ \frac{36 + 24}{25} & \frac{48 - 18}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{25} & \frac{60}{25} \\ \frac{60}{25} & \frac{30}{25} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1/5 & 12/5 \\ 12/5 & 6/5 \end{pmatrix} //$$

---

HO EH S3

PEARO

Si EH E.

---