uah / Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

PAUTA CORRECCIÓN SOLEMNE 3 ÁLGEBRA LINEAL
Segundo Semestre 2025

P1. Considere el sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$ con $A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

a) Encuentre una matriz invertible P y una matriz de la forma $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tal que $A = PCP^{-1}$.

b) Clasifique el origen como atractor espiral, repulsor espiral o centro orbital. Justifique su respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución

a) Se calculan los valores propios de A:

$$\|A - \lambda I\| = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 + 4i \vee \lambda = 1 - 4i \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

De aquí se tiene que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Se busca espacio propio de $\lambda = 1 + 4i$. Para esto se debe encontrar el kernel de la matriz $A - (1 + 4i)I$.

$$A - (1 + 4i)I = \begin{pmatrix} -3 - (1 + 4i) & -8 \\ 4 & 5 - (1 + 4i) \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 - i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto,

$$E(1 + 4i) = \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego la matriz P es:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

b) Como $\lambda = 1 + 4i$, entonces

$$\|\lambda\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Como

$$\|\lambda\| > 1, \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

entonces el origen es un repulson espiral. **(0.2 puntos)**

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que las columnas de A forman un conjunto ortogonal de vectores en $\mathbb{R}^3$. **(0.3 puntos)**

b) Determine si las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^3$. Justifique su respuesta. **(0.2 puntos)**

c) Encuentre una matriz U de columnas ortonormales tal que $Col(U) = Col(A)$. **(0.5 puntos)**

d) Determine U^{-1}. **(0.5 puntos)**

Solución: Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

las columas de A.

a) Es sencillo verificar que

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

Por lo tanto, las columnas de A forman un conjunto ortogonal de vectores en $\mathbb{R}^3$. (**0.3 puntos**)

b) Como las columnas forman un conjunto ortogonal de vectores en $\mathbb{R}^3$ y ninguna de ellas es nula, entonces además forman un conjunto linalmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^3$. (**0.2 puntos**)

c) La matriz U tiene columnas a las columas de A normalizadas, luego

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad \text{(}\textbf{0.5 puntos}\text{)}$$

d) Como U es una matriz ortogonal, entonces $U^{-1} = U^{\top}$, luego:

$$U^{-1} = U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad \text{(}\textbf{0.5 puntos}\text{)}$$

P3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre $W^{\perp}$. **(0.5 puntos)**
b) Determine una base ortogonal para $W^{\perp}$. **(0.5 puntos)**
c) Muestre una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base ortogonal de $W^{\perp}$ encontrada en *b*). **(0.5 puntos)**

Solución: Notar que

$$W = Gen(\{v_1, v_2, v_3)\}) = Gen(\{v_1\}) = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

a) Para hallar $W^\perp$ se utiliza la definición de complemento ortogonal.

$$\begin{aligned}
W^\perp &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : u \cdot v_1 = 0\right\} \\
&= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : u \cdot v_1 = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y + z = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x = -2y - z\right\} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.3 puntos)}
\end{aligned}$$

b) Denotemos por $u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sea una base $B_0 = \{w_1, w_2\}$ base ortogonal de $W^\perp$ con:

$$w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Mientras que

$$w_2 = u_2 - \frac{u_2^\top w_2}{\|w_2\|^2}\, w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo que una base ortogonal es:

$$B_0 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

c) Una posible base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que satisface lo pedido es:

$$\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

P4. Considere el sistema de ecuaciones homogéneo $Ax = 0$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre el subespacio W de $\mathbb{R}^4$ generado por las soluciones del sistema dado. **(0.5 puntos)**

b) Determine el complemento ortogonal $W^\perp$ del subespacio W. **(0.5 puntos)**

c) Verifique si el vector $v = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ pertenece a $W^\perp$. En caso negativo, encuentre la mejor aproximación de v sobre $W^\perp$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Expresando la matriz A en su forma escalonada reducida por fila:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego, el espacio de soluciones W es:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + 2z + 2t = 0 \wedge y + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2z - 2t \\ -z \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \\ &= Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.1 puntos)} \end{aligned}$$

b) Sean $w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ u \in \mathbb{R}^4 : u \cdot w_1 = 0 \wedge u \cdot w_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : -2x - y + z = 0,\ -2x + t = 0 \right\} \end{aligned}$$

Escalonando la matriz de coeficientes del sistema se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

c) El vector $v = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^\top$ pertenece a $W^\perp$ si y sólo si se puede expresar como combinación lineal de los vectores generadores de $W^\perp$.

Si denotamos como u_1 y u_2 a los vectores generadores, entonces se debe analizar la existencia de ponderadores α y β tales que $v = \alpha u_1 + \beta u_2$. Se estudia el rango de $(u_1\ u_2 \mid v)$. **(0.1 puntos)**

$$(u_1\ u_2 \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Como $ran((u_1\ \ u_2)) = ran((u_1\ \ u_2 \mid v))$, entonces los escalares α y β existen. Se concluye que el vector $v \in W^{\perp}$. **(0.2 puntos)**