

PRE SOLEMNE 3 ÁLGEBRA LINEAL

P1. Considere el sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$ con $A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Encuentre una matriz invertible P y una matriz de la forma $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tal que $A = PCP^{-1}$.

b) Clasifique el origen como atractor espiral, repulsor espiral o centro orbital. Justifique su respuesta.

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Verifique que las columnas de A forman un conjunto ortogonal de vectores en \mathbb{R}^3 .

b) ¿Forman las columnas de la matriz A un conjunto linealmente independiente de vectores en \mathbb{R}^3 ?

c) Encuentre una matriz U de columnas ortonormales tal que $Col(U) = Col(A)$.

d) Teniendo presente la definición de matriz ortogonal, es decir:

“Una matriz cuadrada U se dice ortogonal si y sólo sí $U^\top U = I$, donde I es la matriz identidad”, determine U^{-1} .

P3. Sea W el subespacio de \mathbb{R}^3 generado por los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la dimensión de W y de W^\perp .

b) Determine una base ortonormal para W .

c) Muestre una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenga a la base ortonormal de W .

P4. Considere el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & +5x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 & +7x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 & +4x_3 + 7x_4 = 0 \\ & +x_2 & +2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Encuentre el subespacio W de \mathbb{R}^4 generado por las soluciones del sistema.

b) Determine el complemento ortogonal W^\perp del subespacio W .

c) Verifique si el vector $v = (1 \ 1 \ 0 \ 0)^\top$ pertenece a W^\perp . En caso negativo, encuentre la mejor aproximación de v sobre W^\perp .