uah / Facultad de Ingeniería Universidad Alberto Hurtado

EJERCICIO de ORTOGONALIDAD en $\mathbb{R}^3$

Considere

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\} \quad \text{subespacio de} \quad \mathbb{R}^3$$

a) Describa geométricamente el subespacio W.

b) Determine una base B de W.

c) Verifique si la base B obtenida es ortogonal. Si no lo es, construya a partir de ella una base ortogonal para W.

d) Determine una base ortonormal de W.

e) Determine $dim(W^\perp)$ (complemento ortogonal de W).

f) Encuentre $W^\perp$ y una base para tal subespacio.

g) Describa geométricamente el subespacio $W^\perp$.

h) Determine la proyección ortogonal del vector $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sobre W.

i) Encuentre la descomposición ortogonal del vector u del item anterior.

j) Encuentre la intersección entre W y $W^\perp$.

SOLUCIÓN:

a) Toda ecuación de la forma $ax + by + cz = 0$ con a, b y c no todos cero simultáneamente representa geométricamente un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$ con vector normal

$$n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el subespacio W corresponde a un plano que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$ con vector normal

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geométricamente,

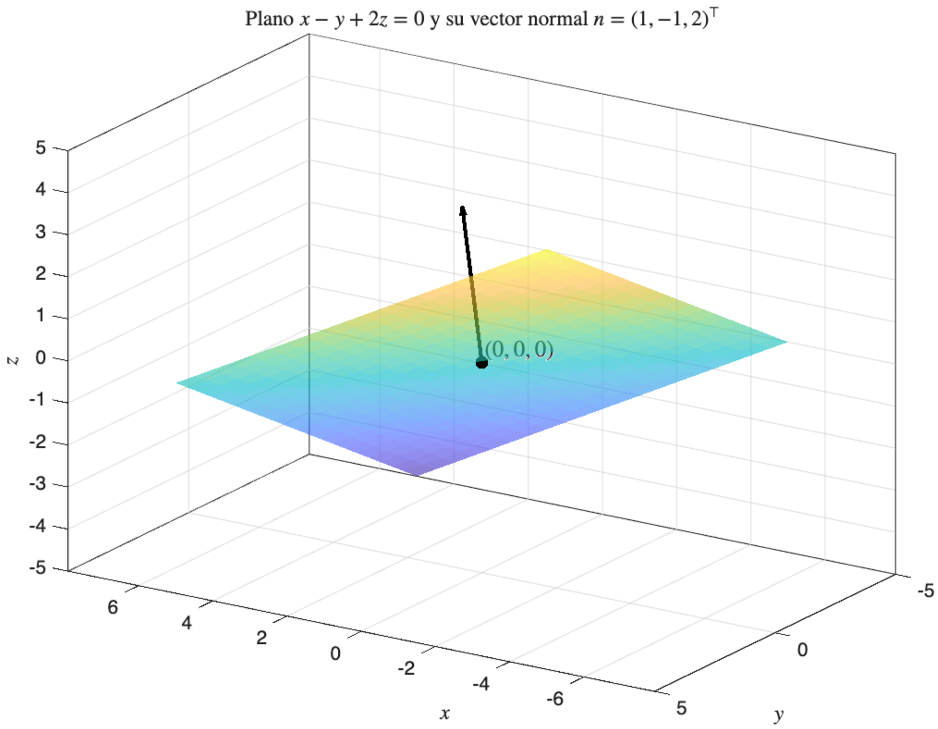

Figura 1: Descripción geométrica del plano W que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$.

b) Para hallar una base de W, se debe despejar **cualquiera** de las tres variables de la ecuación del plano. Despejemos x:

$$x - y + 2z = 0 \Longleftrightarrow x = y - 2z$$

Luego,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y - 2z \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Sea

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora se justifica que B es una base para W.

Como B

- es un conjunto de vectores que genera a W (los vectores de B son justamente los vectores directores del plano), y además

- es linealmente independiente, ya que está constituido por dos vectores y ninguno es múltiplo escalar del otro,

entonces B es una base de W.

c) Recordar la definición de base ortogonal de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$:

“ Una base de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ se dice que es una base ortogonal si y sólo si el producto punto entre cada par de vectores distintos de B es igual a 0 ”

En este caso,

$$v_1 \cdot v_2 = v_1^\top v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Por lo tanto la base B no es ortogonal.

Sea $B_o = \{w_1, w_2\}$ base ortogonal de W. Los vectores w_1 y w_2 se obtienen a partir del proceso de ortogonalización de Gram – Schmidt.

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2}\, w_1 \end{aligned}$$

donde,

- $w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v_2 \cdot w_1 = v_2 \cdot v_1 = v_1 \cdot v_2 = -2.$
- $\|w_1\|^2 = w_1 \cdot w_1 = w_1^\top w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(1) + (1)(1) + (0)(0) = 2$

Retomando el cálculo para w_2, se tiene que:

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2}\, w_1 \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{-2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B_o = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortogonal de W.

Observaciones:

- El proceso de ortogonalización de Gram – Schmidt garantiza que B_o es base ortogonal de W. Luego, **NO** se debe verificar que B_o es una base (el teorema lo garantiza).

- Opcionalmente, con el objetivo de verificar que B_o es efectivamente un conjunto ortogonal de vectores, se calcula el producto punto entre ellos.

$$w_1 \cdot w_2 = w_1^\top w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(-1) + (1)(1) + (0)(1) = 0.$$

  Como $w_1 \cdot w_2 = 0$, entonces w_1 y w_2 son vectores ortogonales.

d) Para construir una base ortonormal $\overline{B_o}$ del subespacio W, basta con normalizar cada vector de la base ortogonal B_o. Es decir, se multiplica cada vector w_i por $\dfrac{1}{\|w_i\|}$ con $i = 1, 2$.

Como $\|w_1\| = \sqrt{2}$ y $\|w_1\| = \sqrt{3}$. Entonces,

$$\overline{B_o} = \left\{ \frac{1}{\|w_1\|} w_1, \ \frac{1}{\|w_2\|} w_2 \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es una base ortonormal de } W.$$

e) Recordar el siguiente Teorema de clases:

“ Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces: $dim(W) + dim(W^\perp) = n$”

Nota: La dimensión $dim(W)$ de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ corresponde al número de vectores que hay en una base de W.

Por otro lado, los planos en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen son siempre subespacios de dimensión 2. De hecho, por *b*) se sabe que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del plano W. Como tal base está formada por dos vectores, entonces

$$dim(W) = 2.$$

Finalmente, dado que

$$dim(W) + dim(W^\perp) = 3 \quad \text{y} \quad dim(W) = 2,$$

entonces $dim(W^\perp) = 1$.

f) El complemento ortogonal $W^{\perp}$ de un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ corresponde al conjunto de todos los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ que son ortogonales con W. Es decir,

$$W^{\perp} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \,:\, v^{\top} w = 0, \quad \text{para todo} \quad w \in W \right\}$$

Para encontrar los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ que son ortogonales a W se usará el siguiente Teorema de clases:

" Si $W = Gen\,\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces se cumple que
$v \in W^{\perp} \iff v \cdot v_i = 0 \iff v^{\top} v_i = 0\,, i = 1, 2, \ldots, k.$ "

Esto quiere decir que un vector $v \in \mathbb{R}^n$ pertenece al $W^{\perp}$ cuando tal vector es ortogonal a **todos** los vectores que generan a W.

En este caso, se tiene por b) que una base de W es

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto, los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que pertenecen a $W^{\perp}$ cumplen las siguientes dos condiciones:

$$v \cdot v_1 = 0 \quad \text{y} \quad v \cdot v_2 = 0 \iff v^{\top} v_1 = 0 \quad \text{y} \quad v^{\top} v_2 = 0$$

Simbólicamente esto se expresa así:

$$\begin{aligned}
W^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, v^{\top} v_1 = 0 \quad \wedge \quad v^{\top} v_2 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, x + y = 0 \quad \wedge \quad -2x + z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,:\, y = -x \quad \wedge \quad z = 2x \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 2x \end{pmatrix} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= Gen \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Sea

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora se justifica que C es una base para $W^{\perp}$.

Como C

- es un conjunto que genera a $W^{\perp}$, y además

- es linealmente independiente, ya que está constituido por un solo vector distinto al vector nulo,

entonces C es una base de $W^{\perp}$.

Observación

- La base C de $W^{\perp}$ está formada por un solo vector. Por lo tanto, $dim(W^{\perp}) = 1$. Lo que coincide con el resultado obtenido en e).

g) Tener presente que en $\mathbb{R}^3$ existen únicamente cuatro tipos de subespacios, cada uno determinado por su dimensión:

- **Dimensión 0:** el subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ corresponde al vector nulo.
- **Dimensión 1:** todas las rectas que pasan por el origen, generadas por un único vector no nulo.
- **Dimensión 2:** todos los planos que pasan por el origen, generados por dos vectores linealmente independientes.
- **Dimensión 3:** el espacio completo $\mathbb{R}^3$.

En resumen, los únicos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son $\{\mathbf{0}\}$, las rectas por el origen, los planos por el origen y el propio $\mathbb{R}^3$.

Recuerdo del curso de Álgebra II

Sean

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{un vector director,}$$

donde un **vector director** se refiere a un vector no nulo que indica la dirección en que “avanza” una recta.

La recta que pasa por P_0 y cuya dirección está dada por v tiene ecuación vectorial:

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_0 + t\,v,\ t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

En nuestro ejercicio, se tiene que:

$$W^{\perp} = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Por lo tanto, $W^{\perp}$ corresponde a una recta que pasa por el origen cuyo vector director es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Observación: El vector director de la recta $W^{\perp}$ coincide con el vector normal del plano W. Como ambos subespacios son ortogonales entre ellos, cualquier vector que pertenezca a la recta, es ortogonal al plano y viceversa.

Geométricamente,

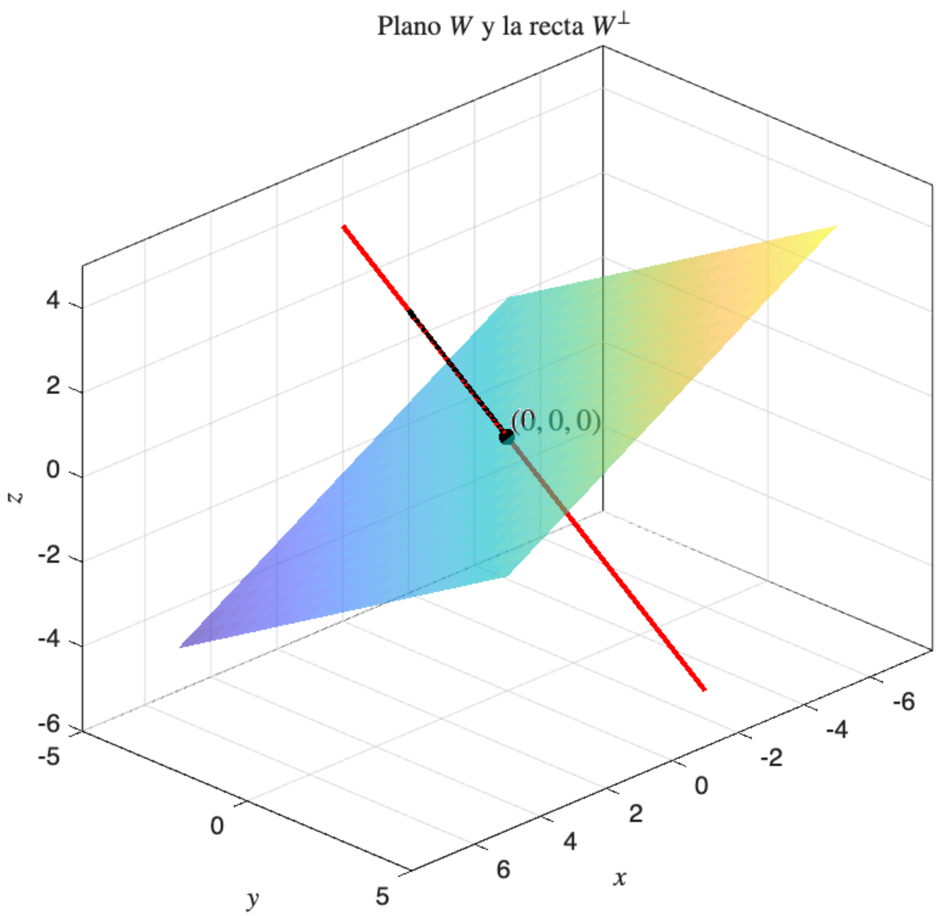

Figura 2: Descripción geométrica del plano W y su complemento ortogonal la recta $W^{\perp}$.

h) Para obtener la proyección de un vector u sobre un subespacio W, es necesario conocer una base ortogonal del subespacio sobre el cual se hará la proyección. En este caso, por c) se tiene que tal base es:

$$B_o = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La proyección ortogonal del vector $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ sobre W corresponde a un vector $proy_W(u)$, que también puede denotarse como $P_W(u)$, donde:

$$P_W(u) = proy_W(u) = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{w_i \cdot u}{\|w_i\|^2} \right) w_i = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{w_i^\top u}{\|w_i\|^2} \right) w_i = \left(\frac{w_1^\top u}{\|w_1\|^2} \right) w_1 + \left(\frac{w_2^\top u}{\|w_2\|^2} \right) w_2$$

Del ejercicio d) se tiene que las normas de $\|w_1\|$ y $\|w_2\|$ son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ respectivamente. Por lo tanto,

$$\|w_1\|^2 = 2 \quad \text{y} \quad \|w_2\|^2 = 3$$

Respecto a los productos puntos se tiene que:

$$w_1^\top u = 4 \quad \text{y} \quad w_2^\top u = 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P_W(u) &= \left(\frac{w_1^\top u}{\|w_1\|^2} \right) w_1 + \left(\frac{w_2^\top u}{\|w_2\|^2} \right) w_2 \\ &= \frac{4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i) El Teorema de Descomposición Ortogonal establece que, dado un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ y para cualquier vector $u \in \mathbb{R}^n$, este puede descomponerse de manera única como:

$$u = w + w^\perp \quad \text{con} \quad w \in W,\ w^\perp \in W^\perp$$

Donde,

- el vector w corresponde a la proyección ortogonal de u sobre W, y

- el vector $w^{\perp}$ corresponde a la proyección ortogonal u sobre $W^{\perp}$

Es decir,

$$w = P_W(u) \quad \text{y} \quad w^{\perp} = P_{W^{\perp}}(u)$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente equivalencia:

$$u = w + w^{\perp} \Longleftrightarrow u = P_W(u) + P_{W^{\perp}}(u) \Longleftrightarrow P_{W^{\perp}}(u) = u - P_W(u)$$

Así,

$$P_{W^{\perp}}(u) = u - P_W(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la descomposición ortogonal del vector u es:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}}_{\in W^{\perp}}$$

Opcionalmente, para verificar que la descomposición es correcta, se deben verificar varias cosas:

- Que el resultado de $w + w^{\perp}$ sea efectivamente igual al vector u.
- Que el vector w efectivamente pertenezca a W, y
- Que el vector $w^{\perp}$ efectivamente pertenezca a $W^{\perp}$.

Verifiquemos que las tres condiciones se cumplen:

- $w + w^{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+7}{3} \\ \frac{7-7}{3} \\ \frac{1+14}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{3} \\ \frac{0}{3} \\ \frac{15}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = u$

- Para verificar que $w \in W$ se debe chequear que $w = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ satisface la ecuación del plano que describe a W. Recordar que,

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Longleftrightarrow x - y + 2z = 0$$

  Como

  $$\frac{5}{3} - \frac{7}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5-7+2}{3} = 0$$

Se concluye que

$$w = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in W$$

- Respecto a $w^{\perp} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix}$, por $g)$ se tiene que :

$$W^{\perp} = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right) = \left\{t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W^{\perp} \iff \quad \text{existe algún} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En nuestro caso $w^{\perp} \in W^{\perp}$ ya que al considerar $t = \frac{7}{3}$, se tiene:

$$\frac{7}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ \frac{14}{3} \end{pmatrix} = w^{\perp}$$

j) Recordar el siguiente Teorema de clases:

“ Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ = vector nulo de $\mathbb{R}^n$”

A partir de este teorema, es directo que

$$W \cap W^{\perp} \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

con

$$W = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \text{y} \quad W = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Visualmente, de $g)$ también se oberva a partir del gráfico que el único punto en la intersección entre el plano W y la recta $W^{\perp}$ es el origen de $\mathbb{R}^3$.