PAUTA CORRECCIÓN SOLEMNE 2 ÁLGEBRA LINEAL

P1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$, y la suma de sus multiplicidades algebraicas es 3.

a) Determine una base para cada espacio propio. **(0.8 ptos)**

b) ¿Existen P matriz invertible y D matriz diagonal tal que $A = PDP^{-1}$? En caso afirmativo, exhiba las matrices P y D. En caso contrario, explique por qué no existen. **(0.7 ptos)**

c) Si u es un vector propio asociado a $\lambda = 2$ y v un vector propio asociado a $\lambda = 5$, obtenidos en *a*), determine $A^3(u+v)$. **(0.5 ptos)**

SOLUCIÓN

a) Se debe encontrar $ker(A - \lambda I)$ para $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$.

Para $\boldsymbol{\lambda = 2}$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego,

$$E(\lambda = 2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = -2y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Como que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ genera a $E(\lambda = 2)$ y además es linealmente independiente, por estar formando por dos vectores ninguno múltiplo escalar del otro, entonces forma una base para el espacio propio. **(0.1 puntos)**

Para $\boldsymbol{\lambda = 5}$:

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego,

$$E(\lambda=5)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}: x=0 \wedge y=z\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\y\end{pmatrix}: y\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Dado que $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ genera a $E(\lambda=5)$ y además es un conjunto linealmente independiente, por contener un solo vector que es diferente al vector nulo, entonces forma una base para el espacio propio. **(0.1 puntos)**

b) El que exista una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $A=PDP^{-1}$ es equivalente a que A sea diagonalizble.

Por otro lado, como A es 3×3 y además

$$dim(E(\lambda=2))+dim(E(\lambda=5))=2+1=3 \quad \text{o bien} \quad m.g(\lambda=2)+m.g(\lambda=5)=2+1=3$$

entonces A es diagonalizable. Luego, **sí** existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tal que $A=PDP^{-1}$. **(0.3 puntos)**.

Algunas posibles matrices P y D son:

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-2&1\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)},\ D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

c) Se pide determinar $A^3(u+v)$ siendo u vector propio de $\lambda=2$ y v vector propio de $\lambda=5$.

Notar que

$$A^3(u+v)=A^3u+A^3v \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Además,

$$Au=2u \Longrightarrow A^3u=2^3u \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

$$Av=5v \Longrightarrow A^3v=5^3v \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Por lo que

$$A^3(u+v)=A^3u+A^3v=2^3u+5^3v \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

P2. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación matricial tal que

$$T(v) = A\,v, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas. **(0.3 ptos)**

b) Determine los puntos fijos de T. **(0.7 ptos)**

c) Calcule la multiplicidad geométrica para el valor propio cuya multiplicidad algebraica es 1. **(0.7 ptos)**

d) Determine si A es diagonalizable. Justifique su respuesta. **(0.3 ptos)**

Recuerdo: Un vector v se llama *punto fijo* de una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si $T(v) = v$.

SOLUCIÓN

a) Al ser A una matriz triangular, sus valores propios son los elementos de la diagonal principal. **(0.1 puntos)**. Entonces,

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{tiene multiplicidad algebraica igual a 2}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \text{tiene multiplicidad algebraica igual a 1}$$

(0.2 puntos)

b) Si v es punto fijo de T entonces

$$T(v) = v \Longleftrightarrow Av = v$$

Es decir, los puntos fijos de T **son los vectores propios** asociados al valor propio $\lambda = 1$. **(0.2 puntos)**.

Para encontrarlos, se busca $ker(A-I)$:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

Por lo tanto,

$$ker(A-I) = E(\lambda = 1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : y = z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Finalmente, el conjunto de puntos fijos de T corresponde a $Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$. (**0.2 puntos**)

c) Del inciso a) se tiene que el valor propio de multiplicidad algebraica igual a 1 es $\lambda = -2$. Para hallar su multiplicidad geométrica, se comienza por encontrar el $ker(A - (-2)I)$.

$$A - (-2)I = A + 2I = \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

Escalonando

$$A - (-2)I = \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Luego,

$$E(\lambda = -2) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x = y = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} : z \in \mathbb{R}\right\} = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Dado que $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ genera a $E(\lambda = -2)$ y además es un conjunto linealmente independiente, por contener un solo vector que es diferente al vector nulo, entonces forma una base para el espacio propio. Por lo tanto,

$$m.g(\lambda = -2) = dim(E(\lambda = -2)) = 1 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

d) Para que una matriz A sea diagonalizable debe ocurrir que la multiplicidad algebraica y geométrica de cada uno de sus valores propios coincidan. (**0.1 puntos**)

Para el valor propio $\lambda = 1$ se tiene que

$$m.a(\lambda = 1) = 2 \quad \text{y} \quad m.g(\lambda = 1) = 1$$

Como $m.a(\lambda = 1) \neq m.g(\lambda = 1) \Longrightarrow A$ no es diagonalizable. (**0.2 puntos**)

P3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix}a & a+1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

a) Determine los valores propios de A en función de a. **(0.5 ptos)**

b) Determine una base para cada espacio propio de A. **(1 pto)**

c) Determine los valores de a para los cuales A es diagonalizable. **(0.5 ptos)**

SOLUCIÓN

a) Los valores propios de A corresponden a las raíces o soluciones de la ecuación

$$|A-\lambda I|=0 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
|A-\lambda I|=0 &\iff \begin{vmatrix} a-\lambda & a+1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \\
&\iff -\lambda(a-\lambda)-(a+1)=0 \\
&\iff \lambda^2-a\,\lambda-(a+1)=0 \quad \textbf{(0.2 puntos)} \\
&\iff \lambda=\frac{-(-a)\pm\sqrt{(-a)^2-4(1)(-(a+1))}}{2} \\
&\iff \lambda=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4a+4}}{2} \\
&\iff \lambda=\frac{a\pm\sqrt{(a+2)^2}}{2} \\
&\iff \lambda=\frac{a\pm(a+2)}{2}
\end{aligned}$$

Los valores propios son

$$\lambda=\frac{a+a+2}{2}=\frac{2a+2}{2}=\frac{2a}{2}+\frac{2}{2}=a+1 \Longrightarrow \boxed{\lambda_1=a+1}. \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Los valores propios son

$$\lambda=\frac{a-(a+2)}{2}=\frac{a-a-2}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Longrightarrow \boxed{\lambda_2=-1}. \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

b) Se debe encontrar $ker(A-\lambda I)$ para $\lambda=a+1$ y $\lambda=-1$.

Para $\boldsymbol{\lambda=a+1}$:

$$A-(a+1)I=\begin{pmatrix} a-(a+1) & a+1 \\ 1 & 0-(a+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & a+1 \\ 1 & -(a+1) \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -(a+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto,

$$E(a+1)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: x=(a+1)y\right\}=\left\{\begin{pmatrix} (a+1)y \\ y \end{pmatrix}: y\in\mathbb{R}\right\}=Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Dado que $\left\{\begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ genera a $E(a+1)$ y además es un conjunto linealmente independiente, por contener un solo vector que es diferente al vector nulo, entonces forma una base para el espacio propio. **(0.1 puntos)**

Para $\boldsymbol{\lambda = -1}$:

$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a+1 \end{pmatrix} \overset{F_2 : -(a+1)F_1 + F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto,

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Dado que $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a $E(-1)$ y además es un conjunto linealmente independiente, por contener un solo vector que es diferente al vector nulo, entonces forma una base para el espacio propio. (**0.1 puntos**).

IMPORTANTE: También es posible realizar el escalonamiento de la siguiente manera

$$A-(-1)I = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 : \frac{1}{a+1}F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 : F_2 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, debe tenerse presente que al multiplicar la fila F_1 por $\frac{1}{a+1}$, es necesario imponer la condición $a+1 \neq 0$, es decir, $a \neq -1$. En caso contrario, se estaría dividiendo por cero. Por lo tanto, si se opta por este procedimiento de escalonamiento, es indispensable analizar por separado el caso $a = -1$, ya que dicho valor del parámetro a queda excluido del análisis anterior.

c) Tener presente que como A es 2×2 entonces

$$A \quad \text{es diagonalizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tienes dos valores propios distintos} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Por lo tanto para que A sea diagonalizable debe ocurrir que

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longleftrightarrow a+1 \neq -1 \Longleftrightarrow \boxed{a \neq -2} \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$