Sistemas dinámicos discretos

Universidad
Alberto Hurtado

Un **sistema dinámico discreto** es una regla de la forma

$$\boxed{x_{k+1} = Ax_k}$$

Donde ,

- x_k es el **vector de estado** del sistema en el paso o tiempo k.
- x_o es el estado inicial del sistema a partir del cual se generan los siguientes.
- A es una matriz fija.

La ecuación $x_{k+1} = Ax_k$ se puede considerar como una descripción de qué le sucede al punto inicial $x_o = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, conforme se transforma repetidamente por la transformación $x \longrightarrow Ax$. La secuencia de puntos $x_o, x_1, x_2, \ldots$ se conoce como la **trayectoria u órbita** del sistema.

Ejemplo: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine los vectores x_2, x_3 y x_4 generados por el sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$.

Solución: Como $x_{k+1} = Ax_k$ entonces:

$$\begin{aligned} x_2 = Ax_1 \quad & \Longleftrightarrow \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora a partir de x_2 se obtiene x_3:

$$\begin{aligned} x_3 = Ax_2 \quad & \Longleftrightarrow \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow \quad x_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Procediendo de la misma forma se obtiene que $x_4 = \begin{pmatrix} 16 \\ 54 \end{pmatrix}$.

¿Y si me piden calcular x_{100}?

Partiendo del estado inicial $\mathbf{x}_1$, los siguientes estados se calculan así:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A\mathbf{x}_1) = A^2\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_4 &= A\mathbf{x}_3 = A^3\mathbf{x}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= A^{k-1}\mathbf{x}_1
\end{aligned}$$

Por eso, si el índice parte en $\mathbf{x}_1$, la fórmula general es:

$$\boxed{\mathbf{x}_k = A^{k-1}\mathbf{x}_1}$$

🧠 Observación clave

Si el sistema parte desde $\mathbf{x}_0$, entonces:

$$\boxed{\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0}$$

Siempre revisa el **índice inicial del problema** para aplicar la fórmula correcta.

Por lo tanto, si nos piden calcular x_{100} se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{100} &= A^{100-1}x_1 \\ &= A^{99}x_1 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{99} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{99} & 0 \\ 0 & 3^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{100} \\ 2 \cdot 3^{99} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio propuesto: Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y el vector $x_o = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinar x_{100}.

Respuesta:

$$x_{100} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2^{100} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Grafique varias trayectorias del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$, cuando

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{pmatrix}$$

Los **vectores propios** asociados a $\lambda_1 = 0.8$ y $\lambda_2 = 0.64$ son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar este hecho.

Como $x_o \in \mathbb{R}^2$, existen escalares $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$x_o = C_1 v_1 + C_2 v_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

y entonces

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x_o = A^k(C_1 v_1 + C_2 v_2) \\ &= C_1(0.8)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(0.64)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1(0.8)^k \\ C_2(0.64)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observar que $x_k \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $k \to \infty$. En este caso el origen es un **atractor** del sistema dinámico:

$$\boxed{\text{El origen es un atractor del sistema dinámico} \iff |\lambda_1| < 1 \ \wedge \ |\lambda_2| < 1}$$

A continuación se observa que las trayectorias u órbitas del sistema dinámico convergen al origen. Esto es independiente del punto inicial x_o con el que se comienza la dinámica.

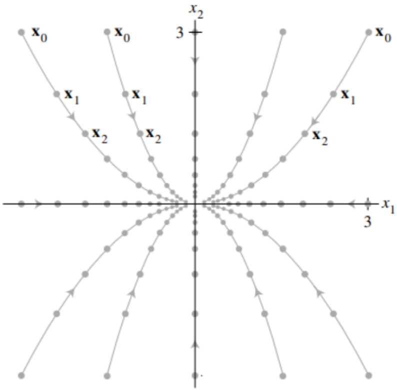


FIGURA 1 El origen como un atractor.

Ejemplo: Estudiar la evolución del sistema $x_{k+1} = Ax_k$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}$$

Solución: Los valores propios son

$$\lambda_1 = 1.44 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 1.2$$

con vectores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{respectivamente}$$

Entonces

$$x_k = \begin{pmatrix} C_1(1.44)^k \\ C_2(1.2)^k \end{pmatrix},$$

y las componentes crecen sin cota al aumentar k.

Geométricamente se tiene que

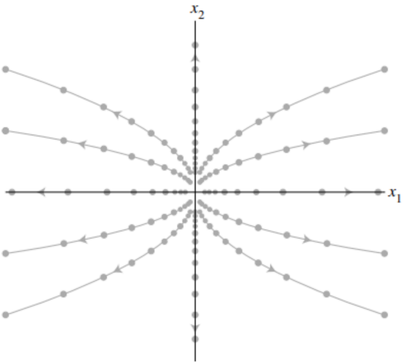


FIGURA 2 El origen como un repulsor.

Notar que las trayectorias u órbitas se van alejando del origen del plano cartesiano a medida que k aumenta. Cuando esto ocurre, se dice que el origen es un **repulsor** del sistema dinámico.

$$\boxed{\text{El origen es un repulsor del sistema dinámico} \iff |\lambda_1| > 1 \ \wedge \ |\lambda_2| > 1}$$

Ejemplo: Estudiar $y_{k+1} = Dy_k$ donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Aquí $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$. Algunas trayectorias u órbitas se acercan al origen y otras se alejan. En este caso se dice que el origen es un **punto silla**.

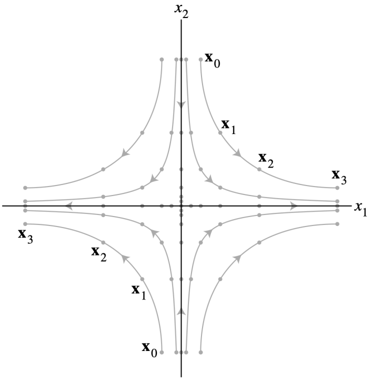


FIGURA 3 El origen como un punto silla.

$$\boxed{\text{El origen es un punto silla del sistema dinámico} \iff |\lambda_1| > 1 \ \wedge \ |\lambda_2| < 1}$$

Ejercicios propuestos: Clasifique el origen como atractor, repulsor o punto silla y determine una expresión para $x_{k+1} = Ax_k$ si es que $x_o = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}^\top$ con C_1, C_2 constantes, donde A es la matriz indicada.

a) $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 0.65 & -0.15 \\ -0.15 & 0.65 \end{pmatrix}$. Los valores propios son $\lambda_1 = 0.5$ y $\lambda_2 = 0.8$, con correspondientes vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1.5$ y $\lambda_2 = 0.5$, con correspondientes vectores propios $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^\top$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}^\top$.

Grafique la trayectoria que comienza en $x_o = \begin{pmatrix}4 & 4\end{pmatrix}^\top$ para los sistemas dinámicos $x_{k+1} = A\,x_k$ que corresponden a las siguientes matrices:

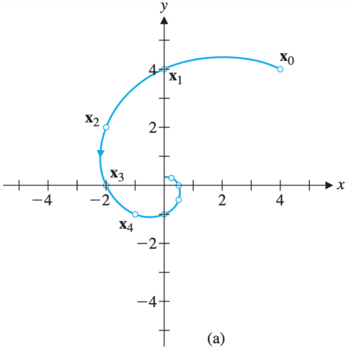
(a) $A = \begin{pmatrix}0.5 & -0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix}0.2 & -1.2\\ 0.6 & 1.4\end{pmatrix}$

SOLUCIÓN

(a) Las primeras cuatro iteraciones son:

$$x_1 = \begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}.$$

La trayectoria generada por las iteraciones de $x_{k+1} = Ax_k$ se muestra a continuación:

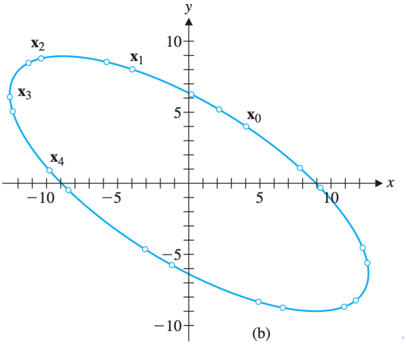


Trayectoria de los vectores x_k de (a)

(b) Las primeras cuatro iteraciones son:

$$x_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -12.8 \\ 7.2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -11.76 \\ -1.68 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -2.448 \\ -12.744 \end{pmatrix}.$$

La trayectoria generada por las iteraciones de $x_{k+1} = Ax_k$ se muestra a continuación:



Trayectoria de los vectores x_k de (b)

Notar que la trayectoria de (a) es un espiral hacia el origen, mientras que la de (b) parece seguir una órbita elíptica.

El siguiente resultado explica el comportamiento en espiral de la trayectoria del ejemplo (a).

Teorema: Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ con valores propios $\lambda = a \pm bi$, y si a y b no son ambos cero, entonces A puede factorizarse como:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

donde $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es ángulo medido desde el eje real positivo (en sentido antihorario) hasta dicho vector, es decir, el argumento del número complejo $\operatorname{Arg}(a + bi)$.

Demostración:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Sea

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Determine la factorización de A, encontrando el factor de escalamiento r y el ángulo de rotación θ. Grafique los primeros cuatro puntos de la trayectoria para el sistema dinámico

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y clasifique el origen como un atractor espiral, un repelente espiral o un centro orbital.

SOLUCIÓN: Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

el valor propio se obtiene directamente de la primera columna: si esta es $(a, b)^\top$, entonces

$$\lambda = a + bi.$$

Este valor propio determina el ángulo de rotación θ mediante

$$\theta = \arg(\lambda) = \arg(a + bi).$$

En este caso,

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

Entonces,

$$r = |\lambda| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \implies \boxed{r = 1}$$

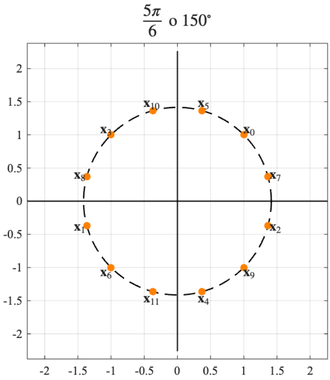
Para el ángulo,

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \implies \boxed{\theta = \frac{5\pi}{6}}$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix}}_{R} = \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix}$$

A continuación se indican las primeras 12 iteraciones del sistema dinámico.

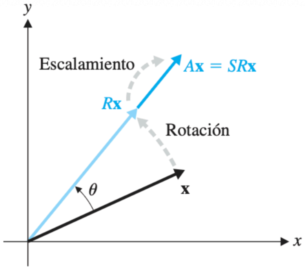


$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}_0 = (1.0000,\ 1.0000), && \mathbf{x}_1 = (-1.3660,\ -0.3660), && \mathbf{x}_2 = (1.3660,\ -0.3660),\\
&\mathbf{x}_3 = (-1.0000,\ 1.0000), && \mathbf{x}_4 = (0.3660,\ -1.3660), && \mathbf{x}_5 = (0.3660,\ 1.3660),\\
&\mathbf{x}_6 = (-1.0000,\ -1.0000), && \mathbf{x}_7 = (1.3660,\ 0.3660), && \mathbf{x}_8 = (-1.3660,\ 0.3660),\\
&\mathbf{x}_9 = (1.0000,\ -1.0000), && \mathbf{x}_{10} = (-0.3660,\ 1.3660), && \mathbf{x}_{11} = (-0.3660,\ -1.3660),
\end{aligned}$$

Observar que la trayectoria u órbita forma una circunferencia con centro en el origen, recorrida en sentido antihorario.

Geométricamente, lo que indica el **Teorema** es el efecto de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ sobre un vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$A\mathbf{x} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{primero el vector se rota}}}_{\text{luego el vector se escala en un factor } r}$$



Rotación seguida por un escalamiento

Las matrices R y S del gráfico son:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

R = rotación y S = scaling = escalamiento en inglés.

En general, si una matriz real A de tamaño 2×2 tiene valores propios complejos $\lambda = a \pm bi$, entonces las trayectorias del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$:

- giran en espiral hacia adentro del origen cuando $|\lambda| < 1$ (el origen es un atractor espiral).
- giran en espiral hacia afuera del origen cuando $|\lambda| > 1$ (el origen es un repulsor espiral).
- son cerradas si $|\lambda| = 1$ (el origen es un centro orbital).

Teniendo presente la definción de matriz ortogonal, es posible diferenciar las trayectorias cerradas en circunferencias y elipses.

Definición: Una matriz cuadrada A se dice ortogonal si y sólo si $A^\top A = I$, donde I es la matriz identidad.

Entonces,

- Si A es ortogonal y $|\lambda| = 1 \Longrightarrow$ las trayectorias (u órbitas) son circunferencias.
- Si A no es ortogonal y $|\lambda| = 1 \Longrightarrow$ las trayectorias (u órbitas) son elipses.

Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 0.2 & -1.2 \\ 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$ tiene valores propios $\lambda = 0.8 \pm 0.6i$. Como $|\lambda| = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1$ y la matriz A no es ortogonal, dado que

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 3.4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se concluye que las trayectorias (u órbitas) del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$ son elipticas.

Ejercicio: Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine la factorización de A, encontrando el factor de escalamiento r y el ángulo de rotación θ. Grafique los primeros cuatro puntos de la trayectoria para el sistema dinámico

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \quad \text{con} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y clasifique el origen como un atractor espiral, un repelente espiral o un centro orbital.

SOLUCIÓN: A partir de la matriz A se tiene que $\lambda = 1 + i$ y por lo tanto,

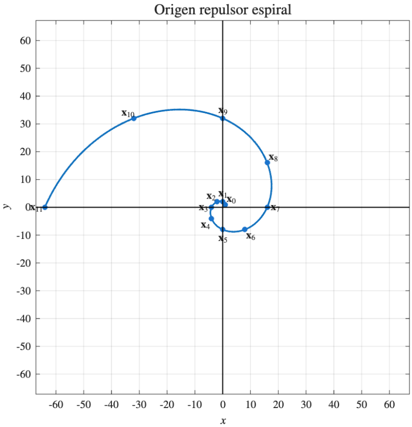
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}} \quad \theta = \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

Por lo tanto, la factorización de la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Notar que como
$$r = |\lambda| = \sqrt{2} > 1 \Longrightarrow \quad \text{el origen es un repulsor espiral}$$

A continuación se muestra la trayectoria espiral del sistema dinámico.



$$\mathbf{x}_0 = (1.0000,\ 1.0000) \qquad \mathbf{x}_4 = (-4.0000,\ -4.0000)$$
$$\mathbf{x}_1 = (0.0000,\ 2.0000) \qquad \mathbf{x}_5 = (0.0000,\ -8.0000)$$
$$\mathbf{x}_2 = (-2.0000,\ 2.0000) \qquad \mathbf{x}_6 = (8.0000,\ -8.0000)$$
$$\mathbf{x}_3 = (-4.0000,\ 0.0000) \qquad \mathbf{x}_7 = (16.0000,\ 0.0000)$$

Se observa que a medida que el sistema dinámico evoluciona, sus estados se alejan del origen siguiendo una trayectoria espiral.

El siguiente **Teorema** muestra que, en general, cuando una matriz real 2×2 tiene valores propios complejos conjugados, esta es semejante (o similar) a una matriz C la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Observación: Si $\mathbf{x}$ es un vector propio asociado a $\lambda = a + bi$, entonces $\bar{\mathbf{x}}$ es un vector propio asociado a $\lambda = a - bi$.

Para un vector propio complejo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + i\,q \\ r + i\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} i$$

Defina la parte real e imaginaria del vector propio $\mathbf{x}$ como:

$$\mathrm{Re}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea A una matriz real de 2×2 con un valor propio complejo $\lambda = a + bi$ (con $b \neq 0$)

y correspondiente vector propio $\mathbf{x}$. Entonces la matriz

$$P = [\,\mathrm{Re}(\mathbf{x}) \quad \mathrm{Im}(\mathbf{x})\,]$$

es invertible, y

$$A = PCP^{-1} \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz A es semejante (o similar) a la matriz C.

Ejemplo: Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0.2 & -1.2 \\ 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$, un valor propio complejo es $\lambda = 0.8 + 0.6i$ y un vector propio asociado a tal λ es:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Re}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{Im}(\mathbf{x})} i$$

Entonces, con $a = 0.8$ y $b = 0.6$,

$$C = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{son tales que} \qquad A = PCP^{-1}.$$

Las trayectorias u órbitas del sistema $x_{k+1} = Ax_k$ forman una elipse con centro el origen.