

EJERCICIOS PREPARACIÓN SOLEMNE 2 ÁLGEBRA LINEAL

P1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{cuyo polinomio característico es } p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 4)$$

Determine:

- a) Una base para cada espacio propio.
- b) Justifique por qué la matriz A es diagonalizable.
- c) Determine matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$, donde P es invertible y D es diagonal.

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{cuyos valores propios son } \lambda = 1 \quad \text{y} \quad \lambda = 5.$$

- a) Determine la multiplicidad geométrica de cada valor propio.
- b) ¿Es A invertible? Si lo es, determine los valores propios de A^{-1} .
- c) Si u es un vector propio de A asociado a $\lambda = 1$, determine A^2u, A^3u y la fórmula general para A^ku , $k \in \mathbb{N}$.
- d) ¿es A diagonalizable? Justifique su respuesta.

P3. Definición de punto fijo: Un vector v se llama punto fijo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si $T(v) = v$.

Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz de representación (o matriz asociada) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Determine todos los vectores $v \in \mathbb{R}^3$, que sean punto fijo de T .
- b) ¿Existen vectores $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$ tales que $T(v) = 3v$? Si existen, determínelos todos.

P4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- a) Determine los valores propios de A en función de a .
- b) Determine una base para cada espacio propio de A .
- c) Determine los valores de a para los cuales A es diagonalizable.
- d) Para los valores de a para los cuales A es diagonalizable, determine matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$, donde P es invertible y D es diagonal.
- e) Para los valores de a para los que A es diagonalizable, encuentre una fórmula para A^n con $n \in \mathbb{N}$.
- f) Determine los valores de a para los cuales A es invertible, y en esos casos, obtenga los valores propios de A^{-1} .