

Álgebra Lineal

Felipe Fresno R.



Universidad
Alberto Hurtado

Introducción a las transformaciones lineales



Universidad
Alberto Hurtado

Considerar el siguiente ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$\begin{aligned}
 Av &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1}
 \end{aligned}$$

Esto indica que la matriz A “transforma” al vector v en $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Y si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector cualquiera del plano, ¿qué efecto tendrá la matriz sobre este vector?

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2 \times 1} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

En lugar de escribir Av escribiremos dicha transformación como $T_A(v)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_A(v) &= Av \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con esto en mente, se introducirá alguna terminología:

- Una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ corresponde a una regla que asigna a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ un único vector $T(v) \in \mathbb{R}^m$.
- El dominio de T se denota como $\text{dom}(T)$ y corresponde al conjunto de partida. Mientras que el conjunto de llegada se llama el codominio de T y se denota como $\text{codom}(T)$. Así, $\text{dom}(T) = \mathbb{R}^n$ y $\text{codom}(T) = \mathbb{R}^m$.
- Si $v \in \text{dom}(T)$ entonces el vector $T(v)$ se llama la imagen de v bajo T y v se dice que es la pre-imagen del vector $T(v) \in \text{codom}(T)$.
- Al conjunto de todas la imágenes posibles $T(v)$ (conforme v varía en el $\text{dom}(T)$) se llama rango de T .

En nuestro ejemplo se tiene que $\text{dom}(T_A) = \mathbb{R}^2$ y $\text{codom}(T_A) = \mathbb{R}^3$ y que la imagen del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $T_A(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como ejercicio determinaremos el rango la transformación $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$\text{por } T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{rango}(T_A) &= \{T_A(v) : v \in \text{dom}(T)\} \\ &= \left\{ T_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right) \\ &= \text{espacio columna de } A \\ &= \text{Col}(A) \end{aligned}$$

O sea que el rango de T_A justo coincide con el espacio columna de la matriz A .

Una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llama transformación lineal si T satisface las dos condiciones siguientes:

1 $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todo vector u y v en $\mathbb{R}^n$.

2 $T(cv) = cT(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar c .

Observación: Las condiciones anteriores pueden resumirse en una sola. Así, $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llama transformación lineal si T cumple que $T(cu + v) = cT(u) + T(v)$ para todo par de vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ y c escalar.

Un ejemplo: Sea A una matriz de orden $m \times n$. Entonces la transformación matricial $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T_A(x) = Ax \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es una transformación lineal.

En efecto, sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$ y c un escalar, entonces

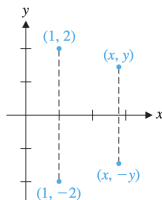
$$\begin{aligned} T_A(cu + v) &= A(cu + v) \\ &= A(cu) + Av \\ &= c(Au) + Av \\ &= cT_A(u) + T_A(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto la transformación matricial T_A es lineal.

Demostraremos que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ es una transformación lineal. En efecto, sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y c un escalar. Luego,

$$\begin{aligned}
 T(cu + v) &= T \left(c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= T \left(\begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cy_1 + y_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cx_1 + x_2 + cy_1 + y_2 \\ cx_1 + x_2 - (cy_1 + y_2) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cx_1 + cy_1 + x_2 + y_2 \\ cx_1 - cy_1 + x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot (x_1 + y_1) \\ c \cdot (x_1 - y_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\
 &= c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = cT(u) + T(v). \quad \text{Por lo que } T \text{ es lineal.}
 \end{aligned}$$

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que envía cada punto a su reflexión en el eje X . Demostraremos que T es lineal. Geométricamente la reflexión se observa de la siguiente manera:



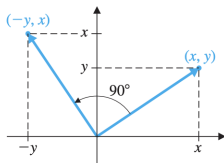
De la figura se puede observar que T envía al punto (x, y) en $(x, -y)$. Por lo que T puede definirse a través de la fórmula $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\ &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

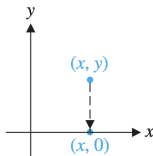
Por lo que T es una transformación matricial y por lo tanto es una transformación lineal.

Demuestre a través de la definición y por medio de transformaciones matriciales que las siguientes transformaciones son lineales.

- 1** Sea $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Esta transformación rota cada punto en 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen tal como lo muestra la siguiente figura:



- 2** Sea $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ la transformación que proyecta un punto sobre el eje X . Demuestre que P es una transformación lineal.



El siguiente resultado establece que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se puede representar mediante una matriz de orden $m \times n$.

Teorema: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica del dominio $\mathbb{R}^n$. Entonces T es una transformación matricial, es decir, T se puede describir a través la matriz A de orden $m \times n$ siguiente:

$$A = [T(e_1); T(e_2); \dots; T(e_n)]$$

donde las columnas de esta matriz corresponden a las imágenes de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Esta matriz se llama matriz estándar o canónica de la transformación lineal T .

Determine la matriz estándar asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + 3y \\ 2x + 5y \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz que representa a T se deben encontrar las imágenes de los vectores de la base canónica de $\text{dom}(T) = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ T(e_2) &= T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia la matriz estándar de T es

$$\begin{aligned} A &= [T(e_1); T(e_2)] \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notar que T va desde $\mathbb{R}^2$ hacia $\mathbb{R}^3$ y el orden de A es 3×2 .

Ejercicios

- 1** Sea $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación matricial correspondiente $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Encuentre $T_A(u)$ y $T_A(v)$ donde $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- 2** Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x \\ 3x - 7y \end{pmatrix}$. Demuestre que T es lineal y determine la matriz estándar asociada.
- 3** Determine la matriz estándar de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface que $T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $T(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la fórmula asociada a la transformación T ?

Una transformación lineal importante es aquella que rota un punto del plano $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en un ángulo θ en torno al origen en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. La matriz que representa a esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Rotar en el 60° punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en torno al origen.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y defina la transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por $T(x) = Ax$, de manera que

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 3x + 5y \\ -x + 7y \end{pmatrix}$$

- 1** Encuentre $T(u)$.
- 2** Encuentre $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = b$.
- 3** ¿Hay más de una $x \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea b ?
- 4** Determine si $c \in \text{rango}(T)$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Se dice que T es sobreyectiva o epiyectiva o sobre si cada vector $b \in \mathbb{R}^m$ es la imagen de al menos un vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Simbólicamente,

$$\begin{aligned}
 T \text{ es sobreyectiva} &\iff \text{para todo } b \in \mathbb{R}^m \text{ existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } T(x) = b \\
 &\iff \text{el sistema de ecuaciones } Ax = b \text{ tiene solución} \\
 &\iff r(A) = m
 \end{aligned}$$

donde A es la matriz que representa a la transformación T .

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. T es inyectiva o uno a uno si y sólo si el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ tiene como única solución a la trivial. Donde A es la matriz que representa a T . O equivalentemente, T es inyectiva si y sólo si $\eta([T]) = 0$.

Ejemplo: Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz de representación es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Estudie sobreyectividad e inyectividad.

Solución:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $r([T]) = 3 = \dim(\text{Codom})(T)$ entonces T es sobreyectiva. Por otro lado, por el teorema del rango, se tiene que $r([T]) + \eta([T]) = 4$. Como $r([T]) = 3$ entonces $\eta([T]) = 1 \neq 0$ y por tanto T no es inyectiva.

Ejercicios

1 Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ Analizar injectividad y sobreyectividad de T .

2 Sea $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$F \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a - 2b - 3d \\ 3a - 4b + c - kd \\ a + c \end{pmatrix}$$

Determine $[F]$ la matriz asociada a F y todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que F sea epiyectiva.

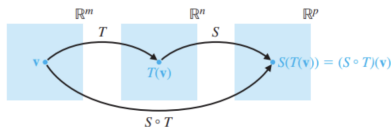
3 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz que representa a una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Demuestre que T no es injectiva.

Composición de transformaciones lineales

Sean $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. La composición entre T y S se denota $S \circ T$ y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S \circ T : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (S \circ T)(v) &= S(T(v)) \end{aligned}$$

Esquemáticamente la composición entre T y S se muestra a continuación:



Notar que para que la composición $S \circ T$ esté definida, es decir exista, debe cumplirse que el codominio de T tiene que coincidir con el dominio de S .

Sean $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. Entonces $S \circ T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ también es una transformación lineal, y sus matrices de representación (matrices estándar) se relacionan mediante

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

Dicho en palabras, la matriz de la composición es igual al producto de las matrices.

Observación: Dado que $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, entonces $[S]_{p \times n}$ y $[T]_{n \times m}$. Por lo tanto el producto matricial $[S]_{p \times n} \cdot [T]_{n \times m}$ está bien definido.

Por ejemplo, Si $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales, entonces la matriz $[S \circ T]$ será de orden 2×4 . ¿Por qué?

Y si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ y $S : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ¿Qué dimensión tendrá la matriz $[S \circ T]$?

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Y sea $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$S \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ 3y - z \\ x - y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

Encuentre una fórmula para $S \circ T$. ¿Qué orden tendrá la matriz que representa a la composición?

La respuesta es: La transformación composición $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y es tal que

$$(S \circ T) \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ 3x - 7y \\ -x + y \\ 6x + 3y \end{pmatrix}$$

- 1** Encuentre la matriz estándar de la transformación que primero rota un punto en 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen y luego refleja el resultado en el eje X .

- 2** Considere las transformaciones lineales $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que refleja el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto a la recta $y = x$ y $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$
 Si la matriz que representa a R es $[R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a) Hallar $T \circ R$.
 - b) Obtener $(T \circ R)\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
 - c) Estudiar epiyectividad e inyectividad de la transformación $T \circ R$.

Transformación lineal inversa

Considere una rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen, seguido por una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Claramente, esto deja todo punto en $\mathbb{R}^2$ sin cambios.

Si denotamos como R_{90° R_{-90° a estas transformaciones respectivamente, entonces se tiene que

$$(R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ})(v) = v \text{ para todo } v \in \mathbb{R}$$

También ocurre que

$$(R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ})(v) = v \text{ para todo } v \in \mathbb{R}$$

Las transformaciones $R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ}$ y $R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ}$ se conocen como **transformación identidad**.

En general, la transformación identidad es una transformación lineal $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $I(v) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto,

$$(R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ})(v) = (R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ})(v) = I(v) = v$$

De este modo, con esta notación,

$$R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ} = I = R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ}$$

Un par de transformaciones que se relacionan mutuamente de esta forma se llaman **transformaciones inversas**.

Definición: Sean S y T transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces S y T son transformaciones inversas si y sólo si

$$S \circ T = T \circ S = I.$$

Cuando ocurra esta situación, se dice que S es la transformación inversa de T y que T es la transformación inversa de S . Más aún, se dirá que S y T son invertibles.

Teorema: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible. Entonces la matriz estándar de $[T]$ es una matriz invertible y

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

En palabras: la matriz de la inversa es la inversa de la matriz.

Definición: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. T es invertible si y sólo si T es sobreyectiva e inyectiva, es decir: biyectiva.

Considere la transformación lineal $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

- a) Demuestre que F es invertible.
- b) Determine la transformación F^{-1} .
- c) Obtenga la imagen del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ bajo F^{-1} .