

Álgebra Lineal

Felipe Fresno R.



Universidad
Alberto Hurtado

Subespacios de $\mathbb{R}^n$



Universidad
Alberto Hurtado

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que W es un **subespacio** de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si se cumplen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- W contiene al vector nulo de $\mathbb{R}^n$.
- W es cerrado bajo suma de vectores. Es decir, si $u, v \in W$ entonces $u + v \in W$.
- W es cerrado bajo multiplicación escalar. Es decir, si $u \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha u \in W$.

Ejemplo: El conjunto definido por

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x \right\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Observación: Geométricamente W corresponde a una recta de pendiente $m = 1$ que pasa por el origen de $\mathbb{R}^2$.

Antes de probar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ veamos que apariencia tienen los vectores contenidos en él:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los vectores que pertenecen a W son aquellos que tienen sus dos componentes iguales. Ahora, verifiquemos las condiciones que caracterizan a un subespacio.

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ ya que las dos componentes del vector nulo son iguales.
- Sean $u, v \in W$, entonces $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$. Sumando se tiene:

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} \in W$$

- Si $u \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\alpha u = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_1 \end{pmatrix} \in W$$

Conclusión: W es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: El conjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 3y + 1, z = -2y, y \in \mathbb{R} \right\}$$

no subespacio de $\mathbb{R}^3$.

En efecto:

Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ estuviera en W , existiría algún $y \in \mathbb{R}$ de modo que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y + 1 \\ y \\ -2y \end{pmatrix}$.

Igualando componentes se llega a que $0 = 1$. Lo que es una contradicción. Por consiguiente, W no contiene al vector nulo de $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto no es un subespacio de él.

Combinaciones lineales

Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se dice **combinación lineal** de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$, si existen escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

Los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ se conocen como coeficientes o ponderadores de la combinación lineal.

Ejemplo: El vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puesto que:

$$v = \underbrace{3}_{=\alpha_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \underbrace{2}_{=\alpha_2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{(-1)}_{=\alpha_3} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio generado por un conjunto de vectores

Sea $W = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. El **subespacio generado por W** corresponde al conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con dichos vectores. Si $\text{Gen}(W) = \mathbb{R}^n$, entonces se dice que W es un **conjunto generador** de $\mathbb{R}^n$ o que $\mathbb{R}^n$ es **generado** por W .

Tal subespacio se denota como

$$Gen(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}), \quad span(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) \quad \text{o bien} \quad \langle \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \rangle$$

Ejemplo: Sea $W = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$. ¿El vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ pertenece a $Gen(W)$?

Solución: La pregunta es equivalente a

¿existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Esta igualdad nos conduce al sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 2 \\ -5\alpha - 3\beta = -4 \\ \alpha + 2\beta = -5 \end{cases}$$

Analizamos si el sistema es o no compatible. Para eso se estudia el rango de la matriz ampliada $(A; B)$

$$\begin{aligned} (A; B) &= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ -5 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & -29 \\ 0 & -3 & 12 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{29}{7} \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{29}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{23}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{29}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Como $\text{ran}(A) = 2$ y $\text{ran}(A; B) = 3$ se tiene que $\text{ran}(A) \neq \text{ran}(A; B)$ y por lo tanto el sistema es incompatible. Luego, **no** existen escalares α y β que lo satisfacen.

Conclusión: El vector $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \notin \text{Gen}(W)$.

Ejercicio: Demostrar que $\mathbb{R}^2 = \text{Gen} \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$.

Demostración: Se debe probar que $\mathbb{R}^2 \subset \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$ y $\text{Gen}(\{v_1, v_2\}) \subset \mathbb{R}^2$.

Pd: $\mathbb{R}^2 \subset Gen(\{v_1, v_2\})$

Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Se necesita demostrar que existen escalares α y β de modo que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a que el sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} 2\alpha & + & \beta & = & x \\ -\alpha & + & 3\beta & = & y \end{cases}$$

sea compatible o consistente. Para eso se estudia el rango de la matriz ampliada $(A; B)$.

$$(A; B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ -1 & 3 & y \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -y \\ 2 & 1 & x \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3x-y}{7} \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{7} \end{array} \right)$$

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A; B) = 2$, el sistema tiene solución única. Luego, $\mathbb{R}^2 \subset \text{Gen}(\{v_1, v_2\})$.

La otra inclusión es obvia (¿por qué?). Por lo tanto, se ha demostrado que

$$\mathbb{R}^2 = Gen \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Subespacios asociados a matrices

Sea A una matriz de orden $m \times n$.

- El **espacio fila** de A se denota como $Fil(A)$ y es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A .
- El **espacio columna** de A se denota como $Col(A)$ y es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A .
- El **espacio nulo** de A se denota como $Nul(A)$ y es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ que consiste en las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Teorema: Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces

- $Fil(A) = Col(A^t)$
- $Col(A) = Fil(A^t)$

Ejercicio: Demuestre que $Nul(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. ¿ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Col}(A)$?

Solución: $v \in \text{Col}(A)$ cuando existen escalares α_1 y α_2 tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Lo anterior es equivalente a que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

sea compatible o consistente.

Notar que $\alpha_2 = 2$. Luego, al reemplazar este valor en la primera ecuación se obtiene que $\alpha_1 = 3$. Por lo tanto, v se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

es decir, $v \in \text{Col}(A)$.

Otra opción para responder la pregunta – aunque más larga – es la siguiente:

Se analiza la matriz ampliada:

$$(A; B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como $\text{ran}(A) = \text{ran}(A; B) = 2$ (número de incógnitas) entonces el sistema tiene solución única. Es decir, existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Luego, $v \in \text{Col}(A)$.

Vectores linealmente independientes y linealmente dependientes

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_k$ es **linealmente independiente** si la única solución de la ecuación

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \mathbf{0}$$

es la trivial, es decir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$$

Si el conjunto de vectores no es linealmente independiente entonces es **linealmente dependiente**.

Ejercicio: Considere los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Demuestre que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente.
- Encuentre la relación de dependencia entre ellos.

Resultados relevantes

- **Teorema:** Los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ son linealmente dependientes si y sólo si al menos uno de los vectores puede expresarse como combinación lineal de los otros.
- **Corolario:** Dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ serán linealmente dependientes si uno de ellos es múltiplo escalar del otro. En caso contrario serán linealmente independientes.
- **Teorema:** Sean $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ y sea A la matriz de orden $n \times k$ que tiene como columnas dichos vectores. Entonces:
 - El conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es **linealmente independiente** si y solo si el sistema homogéneo

$$Ax = \mathbf{0}$$

tiene únicamente la solución trivial $x = \mathbf{0}$. Esto ocurre cuando $\text{ran}(A) = k$.

- El conjunto es **linealmente dependiente** si el sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales, lo que implica infinitas soluciones, y ocurre cuando $\text{ran}(A) < k$.

Base de un subespacio

Una **base** para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores en W que

- genera a W , y
- es linealmente independiente.

Ejemplo: Anteriormente se demostró que

$$\mathbb{R}^2 = \text{Gen} \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Además, como v_1 y v_2 no son múltiplos escalares, son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo: El conjunto de vectores

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

también forma una base de $\mathbb{R}^2$ (¡probarlo!). Esta se conoce como **base canónica o estándar**.

Ejercicio: Demuestre que el conjunto

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Sea

$$W = \text{Gen} \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Encuentre una base para W .

Solución: El conjunto de vectores ya genera a W , por lo que formarán una base de W si también son linealmente independientes.

Para analizar la independencia lineal, se deben estudiar las soluciones que emergen del sistema de ecuaciones siguiente:

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se analiza el rango de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -10 \\ 0 & 5 & -15 \\ 0 & -17 & 51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\text{ran}(A) = 2 < 3$ (n° de incógnitas), el sistema tiene infinitas soluciones y por lo tanto el conjunto de vectores es linealmente dependiente. La relación de dependencia entre ellos es:

$$v_3 = 2v_1 - 3v_2$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
 W &= \text{Gen} \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \\
 &= \text{Gen} \left(\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)
 \end{aligned}$$

Como además v_1 y v_2 no son múltiplos escalares, entonces

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de W .

Bases de subespacios asociados a matrices

Los tres teoremas siguientes permiten justificar y resolver el problema de encontrar una base para $Fil(A)$ y $Col(A)$: el primero establece que la equivalencia por filas conserva el espacio fila, el segundo y tercero dan el método concreto para hallar una base de los dos subespacios.

Teorema 1: Si $A \sim B$ entonces $Fil(B) = Fil(A)$.

Teorema 2: Si R es la matriz escalonada reducida por fila de A , entonces las filas no nulas de R constituyen una base para $Fil(A)$.

Teorema 3: Las columnas de A en posición de los pivotes de R forman una base de $Col(A)$.

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Encuentre los espacios $Fil(A)$, $Col(A)$ y $Nul(A)$
- Encuentre una base para cada uno de ellos.

Solución: Reducimos A a su forma escalonada reducida por fila:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

■ Para hallar $Fil(A)$, por el **Teorema 1** se tiene:

$$\begin{aligned} Fil(A) &= Fil(R) \\ &= Gen\left(\left\{(1, 0, 1, 0, -1), (0, 1, 2, 0, 3), (0, 0, 0, 1, 4)\right\}\right) \end{aligned}$$

Por el **Teorema 2**, una base para el espacio fila de A es:

$$B_{Fil(A)} = \left\{(1, 0, 1, 0, -1), (0, 1, 2, 0, 3), (0, 0, 0, 1, 4)\right\}$$

- Para hallar $Col(A)$ se toman de A sus columnas que corresponden a las columnas pivote de R . Así,

$$Col(A) = Gen \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

En la matriz R se observa que si $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ y $\mathbf{r}_5$ son sus columnas, entonces:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_5 = -\mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_4$$

Las correspondientes columnas de A satisfacen las mismas condiciones de dependencia. Es decir, si $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ y $\mathbf{a}_5$ son sus columnas, entonces

$$a_3 = a_1 + 2a_2, \quad a_5 = -a_1 + 3a_2 + 4a_4$$

Finalmente, por el **Teorema 3**, una base para el espacio columna de A es

$$B_{Col(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Para hallar el espacio nulo de A resolvemos el sistema de ecuaciones homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$, $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_4 + 4x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : \begin{array}{l} x_1 = -x_3 + x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 3x_5 \\ x_4 = -4x_5 \end{array} \right\}$$

Si designamos como $s := x_3$ y $t := x_5$, obtenemos:

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -s+t \\ -2s-3t \\ s \\ -4t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -3t \\ 0 \\ -4t \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Gen} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Finalmente, como $Nul(A)$ está generado por dos vectores y ninguno es múltiplo escalar del otro, entonces son linealmente independientes; por tanto, una base de $Nul(A)$ es:

$$B_{Nul(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio: Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = (a, b, c) \quad y \quad u = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Determine si $v \in Col(A)$.
- Demuestre que $w \in Fil(A) \iff 3a - b + 2c = 0$.
- Determine si el vector $u + v \in Nul(A)$. Hágalo de dos formas:
(i) encontrando una base de $Nul(A)$ y (ii) verificando si $A(u + v) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

Dimensión de un subespacio

Anteriormente se mostraron dos bases para $\mathbb{R}^2$:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Notar que ambas tienen la misma cantidad de vectores. Esto no es casualidad y es un hecho que se establece en el siguiente resultado:

Teorema: Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces cualesquiera dos bases de W tienen el mismo número de vectores.

Definición: Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces el número de vectores en una base para W se llama la **dimensión de W** , y se denota como $\text{dim}(W)$.

Ejemplos:

- En $W = \text{Gen} \left(\left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right)$, w_1 y w_2 generan a W y son linealmente independientes. Luego, forman una base y $\dim(W) = 2$.
- $\dim(\mathbb{R}) = 1, \dim(\mathbb{R}^2) = 2, \dots, \dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

■ Encuentre $\dim(\text{Fil}(A))$

■ Encuentre $\dim(\text{Col}(A))$

Solución: Escalonando la matriz A se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$B_{\text{Fil}(A)} = \left\{ \left(1, 0, \frac{8}{5} \right), \left(0, 1, -\frac{1}{5} \right) \right\} \quad \text{y} \quad B_{\text{Col}(A)} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Por tanto,

$$\dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = 2$$

En general, se cumple que $\dim(Fil(A)) = \dim(Col(A))$. En efecto:

Sea R la matriz escalonada reducida por fila de A , luego $Fil(A) = Fil(R)$, de modo que:

$$\begin{aligned} \dim(Fil(A)) &= \dim(Fil(R)) \\ &= \text{cantidad de filas no nulas de } R \\ &= \text{cantidad de unos pivote de } R \\ &= r \quad (\text{a la cantidad de unos pivote de } R \text{ le llamaremos } r) \end{aligned}$$

Las r columnas que contienen los unos pivotes en R son linealmente independientes por tratarse de vectores canónicos, vale decir, tienen el 1 pivote en alguna componente de la columna y ceros en las restantes.

Por otro lado, dado que las relaciones de dependencia entre las columnas de R son las mismas relaciones de dependencia entre las columnas de A . Las columnas de A correspondientes a las columnas que contienen los pivotes en R son linealmente independientes.

En resumen, en R hay r columnas linealmente independientes que generan a $Col(R)$ mientras que en A también hay r columnas linealmente independientes que generan a $Col(A)$. Por tanto se cumple que $dim(Col(A)) = dim(Col)(R) = r$.

Se ha probado el siguiente resultado:

Teorema: Sea A una matriz de cualquier orden, entonces

$$\dim(Fil(A)) = \dim(Col(A))$$

El rango de una matriz A

El rango de una matriz es la dimensión de sus espacios fila y columna y se denota mediante $\text{ran}(A)$.

Por ejemplo, dado que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ran}(A) = \dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = 2 = \text{numero de filas no nulas de } R$$

Dado que $\text{Fil}(A) = \text{Col}(A^t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{ran}(A^t) &= \dim(\text{Col}(A^t)) \\ &= \dim(\text{Fil}(A)) \\ &= \text{ran}(A) \end{aligned}$$

Se ha probado el siguiente resultado:

Teorema: Para cualquier matriz A ,

$$\text{ran}(A^t) = \text{ran}(A)$$

La **nulidad de una matriz A** es la dimensión de su espacio nulo y se denota por $nulidad(A)$. Es decir,

$$nulidad(A) = \dim(Nul(A)) = \text{número de variables libres de } A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Teorema del rango: Si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$ran(A) + nulidad(A) = n \quad (\text{número de columnas})$$

Observación: Con frecuencia, cuando se necesita conocer la nulidad de una matriz, no es necesario conocer la solución explícita de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El Teorema del rango es extremadamente útil en tales situaciones.

Ejemplo: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 4 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 2}$$

Observar que los vectores columnas son linealmente independientes y generan al espacio columna de A , luego $ran(A) = 2$. Así, en virtud del teorema del rango

$$ran(A) + nulidad(A) = n \iff 2 + nulidad(A) = 2 \iff nulidad(A) = 0$$

Ejercicio: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Determine una base y dimensión de $Fil(A)$
- Determine la dimensión de $Nul(A^t)$

Solución: Se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto una base del espacio fila de A es

$$B_{Fil(A)} = \left\{ (1, -2, 0, -1, -3), (0, 0, 1, 2, -2) \right\} \implies \dim(Fil(A)) = 2$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \text{Fil}(A) = \text{Col}(A^t) &\implies \dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A^t)) \\
 &\implies 2 = \dim(\text{Col}(A^t)) \\
 &\implies \dim(\text{Col}(A^t)) = 2 \\
 &\implies \text{ran}(A^t) = 2
 \end{aligned}$$

Luego, aplicando el Teorema del rango a la matriz A^t se tiene:

$$\begin{aligned}
 \text{ran}(A^t) + \text{nulidad}(A^t) &= n^\circ \text{ de columnas de } A^t \\
 \text{ran}(A^t) + \text{nulidad}(A^t) &= 3 \\
 2 + \text{nulidad}(A^t) &= 3 \\
 \text{nulidad}(A^t) &= 3 - 2 \\
 \text{nulidad}(A^t) &= 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la dimensión de $\text{Nul}(A^t)$ es 1.

Ejercicio: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Encuentre una base y dimensión del espacio columna de A
- Encuentre una base y dimensión del espacio fila A
- Encuentre una base y dimensión del espacio fila A^t
- Encuentre una base y dimensión del espacio columna de A^t
- Determine la nulidad de A sin encontrar una base de $Nul(A)$
- Determine la nulidad de A^t sin encontrar una base de $Nul(A^t)$

Resultados útiles

Sea $\mathbb{R}^n$. Se tiene que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Es importante tener presente los siguientes resultados:

- Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ con $m > n$, entonces S es un conjunto linealmente dependiente.
- Si $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$ son **linealmente independientes**, entonces B es **base** de $\mathbb{R}^n$.
- Si $B = \{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$ es **generador** de $\mathbb{R}^n$, entonces B es **base** de $\mathbb{R}^n$.
- Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $\dim(W) \leq n$.
- Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dim(W) = n$, entonces $W = \mathbb{R}^n$.

Teorema fundamental de las matrices invertibles

Sea A una matriz cuadrada de orden n . Los siguientes enunciados son equivalentes:

- A es invertible.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.
- La forma escalonada reducida por filas de A es I_n = matriz identidad de orden n .
- $\text{ran}(A) = n$.
- $\text{nulidad}(A) = 0$.
- Las columnas de A son linealmente independientes.
- Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
- Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
- Las filas de A son linealmente independientes.
- Las filas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
- Las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Demuestre que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

constituye una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Se usará que el rango de A , la matriz cuyas columnas son los vectores dados, es igual a 3 y por el teorema, B será base de $\mathbb{R}^3$. En efecto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $\text{ran}(A) = 3$ entonces B es base de $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas de un vector respecto a una base

Teorema: Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base para W . Para todo vector $v \in W$, existe exactamente una única forma de escribir v como combinación lineal de los vectores de la base B .

Demostración: Dado que B es una base, genera a W , de modo que v puede escribirse de al menos una forma como combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_k$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

Supongamos que existe otra combinación lineal para v :

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k.$$

Luego,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k$$

Trasponiendo todo al miembro izquierdo de la ecuación y reordenando, se obtiene

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + (\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0$$

Como los vectores son linealmente independientes entonces todos los ponderadores deben ser iguales a cero:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \cdots = \alpha_k - \beta_k = 0$$

Luego,

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

Por ende, existe una única forma de escribir v como combinación lineal de los vectores en B .

Por tanto, si $v \in W$ subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base de W , entonces la combinación lineal

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$$

es única.

Los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ se llaman **coordenadas del vector v con respecto a la base B** , y el vector columna

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

se llama **vector coordenado** de v con respecto a la base B .

Ejemplo: Sea $B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$, el vector $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ se puede escribir como combinación lineal de v_1 y v_2 :

$$v = 4v_1 - 7v_2 \implies [v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Considere la base de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

■ Si $v \in \mathbb{R}^3$ es tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el vector v .

■ Determine $[v]_C$ donde

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{es una base de } \mathbb{R}^3$$

Respuestas:

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [v]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

