

Álgebra Lineal

Guía 12: Problemas de Mínimos cuadrados

1. Encuentre una solución de mínimos cuadrados y el error de mínimos cuadrados de $Ax = b$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. ¿Qué se puede decir acerca de la solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuando $\mathbf{b}$ es ortogonal a las columnas de A ?
3. Determine la recta de mínimos cuadrados (recta de regresión) que mejor se ajuste a los puntos $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$.
4. Encuentre la parábola de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos $(1, 1), (2, -2), (3, 3), (4, 4)$.
5. Justifique si es verdadero o falso:
- (a) Una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un vector $\hat{\mathbf{x}}$ que satisface $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, donde $\hat{\mathbf{b}}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\text{Col } A$.
 - (b) Una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un vector $\hat{\mathbf{x}}$ tal que

$$\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$$

para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

- (c) Cualquier solución de $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ es una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- (d) Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene exactamente una solución de mínimos cuadrados.
- (e) Si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A , entonces cada solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es una solución de mínimos cuadrados.
- (f) La solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el punto en el espacio columna de A más cercano a $\mathbf{b}$.