

Álgebra Lineal

Guía 8: Ortogonalidad

Problemas mínimos

1. Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Calcule $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ y $\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right) \mathbf{a}$.
- (b) Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{c}$.
- (c) Demuestre que $\mathbf{d}$ es ortogonal a $\mathbf{c}$.
- (d) Utilice los resultados de los ítem (b) y (c) para explicar por qué $\mathbf{d}$ debe ser ortogonal al vector unitario $\mathbf{u}$.

2. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ donde $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Determine cuál de los siguientes conjuntos de vectores son **ortogonales**:

(a) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. Determine si el conjunto ortogonal de vectores dado es **ortonormal**. Si no lo es, normalice los vectores para formar un conjunto ortonormal.

(a) $\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Problemas complementarios

5. Determine si la matriz dada es ortogonal. Si lo es, encuentre su inversa.

$$(a) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 2/5 \\ 1/2 & -1/3 & 2/5 \\ -1/2 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta & -\sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta & \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

6. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

(c) Para cualquier escalar c , $\|c\mathbf{v}\| = c\|\mathbf{v}\|$.

(d) Si $\mathbf{x}$ es ortogonal a cada vector en un subespacio W , entonces $\mathbf{x}$ está en $W^\perp$.

(e) Si $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(f) Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto ortogonal, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

7. (a) Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto ortogonal, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

(b) A partir de los vectores anteriores, determine una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(c) Encuentre las coordenadas del vector $y = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$ con respecto de la base del ítem anterior.