

Álgebra Lineal

Guía 7: Sistemas dinámicos y valores propios complejos

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y el vector $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine los vectores $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ y $\mathbf{x}_{100}$

generados por el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

2. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ y el vector $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine los vectores $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ y $\mathbf{x}_{100}$

generados por el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

3. Grafique varias trayectorias del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, cuando

(a) $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Además clasifique el origen como atractor, repulsor o punto silla.

4. La matriz dada es de la forma $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. En cada caso, A puede factorizarse como el producto de una matriz de escalamiento y una matriz de rotación:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- Encuentre el factor de escalamiento r y el ángulo de rotación θ .
- Grafique los primeros cuatro puntos de la trayectoria para el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ con $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y clasifique el origen como un atractor espiral, un repulsor espiral o un centro orbital.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

5. • Encuentre una matriz invertible P y una matriz C de la forma $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que

$$A = PCP^{-1}.$$

- Grafique los primeros seis puntos de la trayectoria para el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ con $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y clasifique el origen como atractor espiral, repelente espiral o centro orbital.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$