

Álgebra Lineal

Guía 6: Semejanza y diagonalización de matrices

Problemas mínimos

1. Explique porqué las matrices A y B no son semejantes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Considere la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ sabiendo que sus valores propios son $-2, -1$ y 0 .

- (a) ¿Porqué puede asegurar que A es diagonalizable?
- (b) Diagonalice la matriz A , es decir, encuentre una matriz P invertible y una D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.
- (c) Determine una expresión para la potencia A^8 .

3. Se presenta una diagonalización de la matriz A de la forma $P^{-1}AP = D$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de esto, determine:

- (a) La matriz A .
- (b) Los valores propios de A .
- (c) Las bases de los espacios propios de A .
- (d) La matriz A^{100} .

4. Determine todos los valores reales de k para los cuales $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

Problemas complementarios

5. A es una matriz de 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional, y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.
6. Determine si la afirmación es verdadera o falsa.
 - (a) Existen matrices invertibles que no son diagonalizables.
 - (b) λ es un valor propio de A si y sólo si $A - \lambda I$ es una matriz invertible.
7. Suponga que A es una matriz de 6×6 con polinomio característico

$$p(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^3.$$

- (a) Demuestre que no es posible encontrar tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^6$ tales que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$.
 - (b) Si A es diagonalizable, ¿cuáles son las dimensiones de los eigenspacios E_{-1} , E_1 y E_2 ?
8. Demuestre que si A es semejante a B , entonces A^T es semejante a B^T .
9. Demuestre que si A es diagonalizable, también lo es A^T .
10. Sea A una matriz invertible. Demuestre que, si A es diagonalizable, también lo es A^{-1} .