

Álgebra Lineal

Guía 5: Valores y vectores propios

Problemas mínimos

1. Demuestre que $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y encuentre el valor propio correspondiente.

2. Para las siguientes dos matrices encuentre:

- El polinomio característico
- Los valores propios
- Una base para cada espacio propio
- La multiplicidad algebraica
- La dimensión de cada espacio propio.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$.

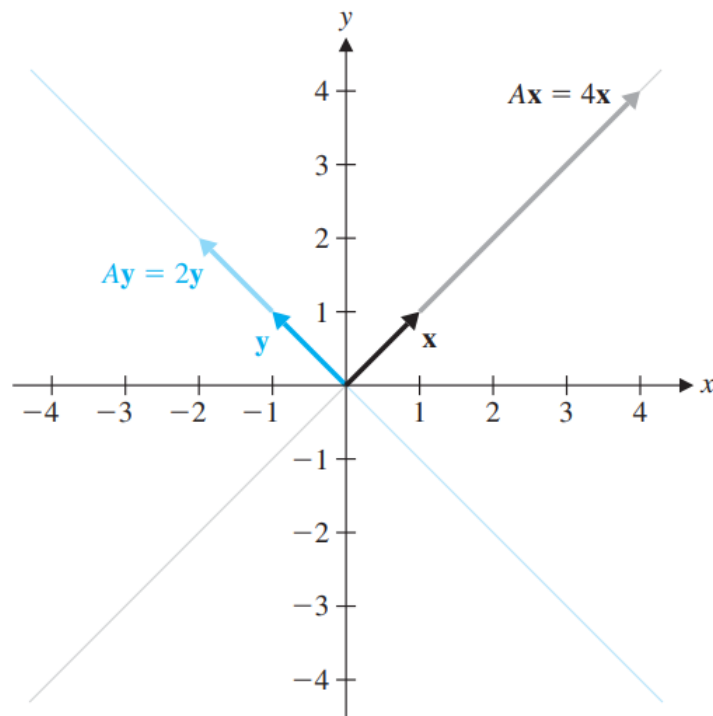
3. Suponga que A es una matriz de 2×2 con vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ que corresponden a valores propios $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = 2$, respectivamente, y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encuentre $A^{10}\mathbf{x}$.

(b) Encuentre $A^k\mathbf{x}$. ¿Qué sucede conforme k se vuelve grande (esto es, $k \rightarrow \infty$)?

Problemas adicionales

4. Considere la siguiente imagen donde se observa la acción de una matriz A sobre dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.



Determine:

- (a) La imagen del vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bajo la acción de la matriz A .
- (b) La imagen del vector $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ bajo la acción de la matriz A .
- (c) La imagen del vector $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ bajo la acción de la matriz A .

5. Encuentre geoméricamente los eigenvalores y eigenvectores de A .

- (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (reflexión en el eje y)
- (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (reflexión en la recta $y = x$)
- (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (proyección sobre el eje x)

6. Determine h en la matriz A , tal que el espacio propio para $\lambda = 4$ sea de dimensión 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$