

Álgebra Lineal

Guía 4: Determinantes

Problemas mínimos

1. Calcule los determinantes de las siguientes matrices:

$$(a) \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Encuentre los determinantes en los ejercicios siguientes, usando propiedades y el hecho que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

$$(a) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

3. Determine la constante k para que la matriz sea invertible:

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$$

4. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo la transformaciones lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Problemas complementarios

5. Determine la constante k para que la matriz sea invertible:

$$A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 4 & k^2 \\ 0 & k & k \end{bmatrix}.$$

6. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$ con $\det A = 3$ y $\det B = -2$. Encuentre los determinantes indicados.

(a) $\det(AB)$

(c) $\det(B^{-1}A)$

(e) $\det(3B^T)$

(b) $\det(A^2)$

(d) $\det(2A)$

(f) $\det(AA^T)$

7. Encuentre el área del paralelogramo cuyos vértices se indican.

(a) $(0, 0), (5, 2), (6, 4), (11, 6)$

(b) $(0, 0), (-1, 3), (4, -5), (3, -2)$

8. Encuentre el volumen del paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1, 0, -2)$, $(1, 2, 4)$ y $(7, 1, 0)$.

9. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo la transformaciones lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.