

PAUTA de CORRECCIÓN SOLEMNE 3 ÁLGEBRA LINEAL

P1. Considere el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ donde $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) (4 pts) Si $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, determine los vectores $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y $\mathbf{x}_4$.

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_4 = A\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 54 \end{bmatrix}$$

b) (2pts) Clasifique el origen como atractor, repulsor o punto silla. Justifique su respuesta.

Como la matriz A es diagonal, entonces sus valores propios son $\lambda_1 = \frac{1}{2} < 1$ y $\lambda_2 = 3 > 1$. Por lo que el origen es un punto silla.

P2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

a) (2 pts) Verifique que las columnas de A son vectores ortogonales.

Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$. Luego,

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (2)(-1) + (1)(2) + (1)(0) = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = (-1)(2) + (2)(1) + (0)(-5) = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = (2)(2) + (1)(1) + (1)(-5) = 0$$

Por lo tanto las columnas de A son ortogonales.

- b) (2 pts) Determine una matriz U de columnas ortonormales tal que $\text{Col}(A) = \text{Col}(U)$.

Determinamos una matriz U de columnas ortonormales tal que $\text{Col}(U) = \text{Col}(A)$, normalizando las columnas de A :

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$$

Entonces:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

- c) (2 pts) Calcule U^{-1} usando las propiedades de las matrices ortogonales.

Como U tiene columnas ortonormales, entonces es una matriz ortogonal y se cumple:

$$U^{-1} = U^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$$

P3. Determine y justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) (3 pts) El complemento ortogonal de una recta de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen es otra recta que pasa por el origen y que la intersecta en un ángulo recto.

La afirmación es **falsa**. Una recta que pasa por el origen corresponde a un subespacio de dimensión 1 de $\mathbb{R}^3$. Su complemento ortogonal es entonces un subespacio de dimensión $3 - 1 = 2$, es decir, un plano que también pasa por el origen.

- b) (3 pts) El complemento ortogonal del espacio fila de una matriz es su espacio columna.

La afirmación es **falsa**. Lo correcto es:

$$(\text{Fil}(A))^\perp = \text{Nul}(A)$$

Es decir, el complemento ortogonal del espacio fila de una matriz es su núcleo o espacio nulo.

P4. Considere el subespacio $\mathbf{W}$ de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) (1.5 pts) Encuentre una base ortogonal para $\mathbf{W}$.

Aplicamos el método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortogonal del subespacio $\mathbf{W}$ generado por los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Definimos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Ortogonalizamos $\mathbf{v}_2$ respecto de $\mathbf{u}_1$:

$$\text{proy}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1$$

Calculamos:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 = (0)(1) + (1)(0) + (-2)(-1) = 2, \quad \|\mathbf{u}_1\|^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\text{proy}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Conclusión: Una base ortogonal para $\mathbf{W}$ es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) (1.5 pts) Determine la proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbf{W}$.

Queremos proyectar ortogonalmente el vector

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sobre el subespacio $W \subset \mathbb{R}^3$, cuya base ortogonal es:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Usamos la fórmula de proyección sobre un subespacio con base ortogonal:

$$\text{proy}_W(\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2$$

Calculamos los productos escalares y normas:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_1 = 1(1) + 1(0) + (-1)(-1) = 2, \quad \|\mathbf{u}_1\|^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_2 = 1(-1) + 1(1) + (-1)(-1) = 1, \quad \|\mathbf{u}_2\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 3$$

Entonces:

$$\text{proy}_W(\mathbf{b}) = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Respuesta:

$$\text{proj}_W(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

- c) (1.5 pts) Escriba el vector $\mathbf{b}$ como suma de un vector en $\mathbf{W}$ y otro en el complemento ortogonal $\mathbf{W}^\perp$.

Ya sabemos que:

$$\text{proj}_W(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{b} - \text{proj}_W(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{W}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\in \mathbf{W}^\perp}$$

- d) (1.5 pts) Sea $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$. Determine una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Queremos encontrar una solución de mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Sabemos que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

Calculamos:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Respuesta: La solución de mínimos cuadrados es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$