

Álgebra Lineal
Solemne 2
Segundo Semestre 2025

Instrucciones:

1. Complete de manera correcta y con letra clara todos los datos personales
2. Escriba su desarrollo de manera clara y ordenada. Recuerde que el proceso de corrección se basa únicamente en lo que queda plasmado en la prueba.
3. Está prohibido el uso de equipos electrónicos(celulares) y calculadora durante el desarrollo de la evaluación
4. De ser sorprendido copiando su calificación será la nota mínima: 1.0 (uno punto cero)

Pregunta 1.

Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Solución

El área de la imagen de S bajo la transformación lineal se calcula como:

$$\text{Área de } A(S) = |\det(A)| \cdot \text{Área de } S.$$

Calculamos el área del paralelogramo original S :

$$\text{Área de } S = |\det[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]| = \left| \det \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = |(-2)(5) - (-2)(3)| = |-10 + 6| = 4$$

Calculamos el determinante de la matriz A :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (6)(2) - (-2)(-3) = 12 - 6 = 6$$

Por lo tanto, el área de la imagen de S bajo la transformación lineal es:

$$\text{Área de } A(S) = |\det(A)| \cdot \text{Área de } S = 6 \cdot 4 = 24$$

Pregunta 2.

Determine y justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Si A y B son matrices con los mismos valores propios, entonces son matrices semejantes.
- b) Una matriz cuadrada de $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes.

Solución

- a) **Falso.** Que dos matrices A y B tengan los mismos valores propios no garantiza que sean semejantes (es decir, que exista una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$).

Contraejemplo: Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo valor propio $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2, pero no son semejantes, ya que A no es diagonalizable.

- b) **Falso.** Una matriz $n \times n$ no necesariamente tiene n vectores propios linealmente independientes. Esto solo ocurre si la matriz es diagonalizable. Si la matriz tiene

valores propios repetidos con multiplicidad geométrica menor que la algebraica, habrá menos de n vectores propios independientes.

Contraejemplo: La matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene solo un vector propio independiente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a pesar de ser 2×2 .

Pregunta 3

Considere la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que los valores propios distintos son $\lambda = 2$ y $\lambda = 3$ (con alguno repetido), determine si A es diagonalizable o no. En caso afirmativo, calcule la matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

Solución

Para determinar si A es diagonalizable, verificamos que la multiplicidad geométrica coincida con la algebraica para cada valor propio. Al resolver $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtenemos un único vector propio linealmente independiente:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lo que confirma que $\text{mg}(2) = 1 = \text{ma}(2)$. Para $\lambda = 3$, el sistema $(A - 3I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ produce dos vectores propios independientes:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mostrando que $\text{mg}(3) = 2 = \text{ma}(3)$. Por tanto, A es diagonalizable.

Construimos la matriz P con los vectores propios como columnas y D con los valores propios correspondientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La inversa P^{-1} puede calcularse como:

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

verificándose que $A = PDP^{-1}$.

Pregunta 4

Suponga que A es una matriz de 6×6 con polinomio característico

$$p(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^3.$$

- a) Explique por que no es posible encontrar tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^6$ tales que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$.
- b) Si A es diagonalizable, ¿cuáles son las dimensiones de los eigenspacios $E(-1)$, $E(1)$ y $E(2)$?

Solución

- a) El polinomio característico de A es $p(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^3$, lo que nos indica que:

- $\lambda = -1$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 1
- $\lambda = 1$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 2
- $\lambda = 2$ es un valor propio con multiplicidad algebraica 3

Para $\lambda = 1$, la multiplicidad geométrica (dimensión del eigenspacio $E(1)$) es a lo más 2, que es su multiplicidad algebraica. Por tanto, el espacio propio correspondiente a $\lambda = 1$ tiene dimensión máxima 2, lo que significa que a lo más pueden existir **dos** vectores propios linealmente independientes asociados a este valor propio.

- b) Si A es diagonalizable, se debe cumplir que la multiplicidad geométrica de cada valor propio coincida con su multiplicidad algebraica. Por tanto:

- Para $\lambda = -1$: $\dim E(-1) = 1$
- Para $\lambda = 1$: $\dim E(1) = 2$
- Para $\lambda = 2$: $\dim E(2) = 3$

Esto garantiza que la suma de las dimensiones de los eigenspacios sea 6, igual a la dimensión de la matriz, permitiendo la diagonalización.