

Álgebra Lineal
Pauta de corrección Solemne 1
Primer Semestre 2025

Pregunta 1.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que $T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y - z \\ x + 2y + z \\ x + y + (k^2 - 5)z \end{bmatrix}$

- a) (2 pts) Determine la matriz estándar de T .
- b) (4 pts) Determine los valores de k de modo que T sea sobreyectiva.

SOLUCIÓN

- a) La matriz que representa a T viene dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 - 5 \end{bmatrix}$$

- b) T es sobreyectiva si y sólo si $r([T]) = 3$.

Escalonando la matriz que representa a T se obtiene:

$$\begin{aligned} [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & k^2 - 5 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k^2 - 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} r([T]) = 3 &\iff k^2 - 4 \neq 0 \\ &\iff k \neq \pm 2 \\ &\iff k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\} \end{aligned}$$

Por lo tanto T es sobreyectiva si y sólo si $k \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Pregunta 2.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ y defina la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- a) (1 pt) Determine el dominio y el codominio de T .
- b) (1 pt) Justifique: ¿Porqué T es una transformación lineal?
- c) (2 pts) Determine la dimensión del núcleo de la transformación T .
- d) (2 pts) ¿El vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ pertenece al rango (recorrido) de la transformación lineal T ? Justifique.

SOLUCIÓN

- a) Dado que la matriz A es de orden 3×4 entonces $\text{dom}(T) = \mathbb{R}^4$ y $\text{Codom}(T) = \mathbb{R}^3$.
- b) La transformación T corresponde a una transformación matricial y por lo tanto es una transformación lineal.
- c) Para determinar la nulidad de T usaremos el Teorema del Rango.

Escalonando la matriz A obtenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $r(A) = 2$ entonces la nulidad de T , esto es la dimensión de $\text{Nul}(A)$, debe ser 2.

d)

$$\begin{aligned} b \in \text{Rang}(T) &\iff \exists x \in \mathbb{R}^4 : T(x) = b \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R}^4 : Ax = b \\ &\iff \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \text{algún } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z + 8w &= 2 \\ x + y + z + w &= 5 \\ 3x + 5y + 7z + 9w &= 9 \end{aligned}$$

tenga solución.

Analizamos la matriz ampliada

$$(A|b) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Como $r(A) \neq r(A|b)$ el sistema no tiene solución y por lo tanto el vector b no tiene pre-imagen y como consecuencia no pertenece al rango de T .

Pregunta 3

Justifique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) (3 pts) El rango de una matriz es igual a la dimensión de su núcleo.
- b) (3 pts) Si A es una matriz de 3×5 , entonces las columnas de A deben ser linealmente dependientes.

SOLUCIÓN

- (a) La afirmación es **falsa** ya que la dimensión del núcleo corresponde a la nulidad de la matriz y no a su rango.
- (b) La afirmación es **verdadera**. Esto debido a que las columnas de A corresponden a vectores en $\mathbb{R}^3$ y cualquier conjunto que tenga más de tres vectores será necesariamente linealmente dependiente.

Pregunta 4

- a) (3 pts) Encuentre la matriz estándar de la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que realiza una rotación de 45° en sentido antihorario, seguida por proyección sobre el eje y , seguida por rotación de 45° en el sentido de horario.
- b) (3 pts) Determine si la matriz del ítem anterior es inyectiva o no.

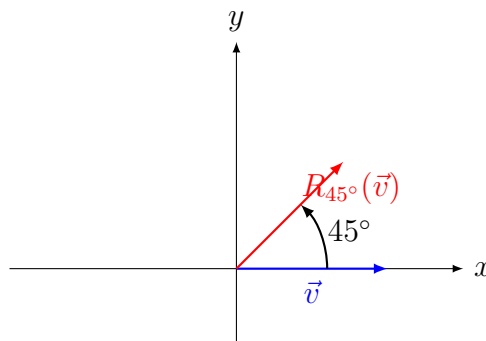
SOLUCIÓN

- a) Sean R_{45° , P_y y R_{-45° las transformaciones lineales que realizan una rotación de 45° en sentido antihorario, la proyección sobre el eje y y seguida de la rotación de 45° en el sentido de horario respectivamente. Piden determinar la matriz $[R_{-45^\circ} \circ P_y \circ R_{45^\circ}]$.

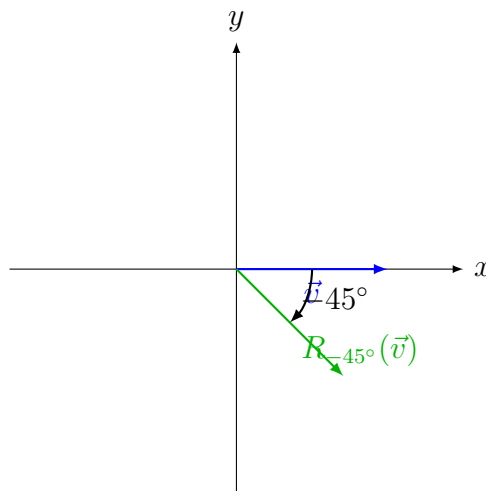
Como

$$[R_{-45^\circ} \circ P_y \circ R_{45^\circ}] = [R_{-45^\circ}][P_y][R_{45^\circ}]$$

Necesitamos las matrices $[R_{-45^\circ}]$, $[P_y]$ y $[R_{45^\circ}]$.



$$[R_{45^\circ}] = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

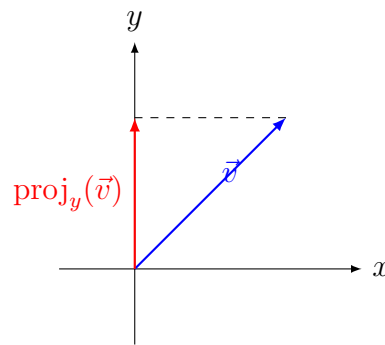


$$[R_{-45^\circ}] = \begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Para hallar $[P_y]$ consideremos la transformación en cuestión y la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$P_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$



Luego, $P_y(e_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $P_y(e_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, la matriz que representa a la transformación P_y es:

$$[P_y] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} [R_{-45^\circ} \circ P_y \circ R_{45^\circ}] &= [R_{-45^\circ}][P_y][R_{45^\circ}] \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- b) La matriz será inyectiva si y sólo si su nulidad es igual a 0. Usaremos el Teorema del rango para determinar la dimensión del núcleo. Para esto, escalonamos la matriz $[R_{-45^\circ} \circ P_y \circ R_{45^\circ}]$.

$$[R_{-45^\circ} \circ P_y \circ R_{45^\circ}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$ entonces la nulidad también vale 1 y por lo tanto A **no** es inyectiva.