Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Pauta corrección Examen
Segundo Semestre 2025

Problema 1. (6 pts)

Sea $z = -1 + i$.

(a) Calcule la parte real de $\dfrac{z+1}{z-1}$.

(b) Escriba z en forma polar, indicando su módulo y su argumento.

(c) Usando la forma polar, determine las raíces cuadradas de z.

Solución

a)

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{-1+i+1}{-1+i-1} = \frac{i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{1-2i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Por lo que la parte real de $\dfrac{z+1}{z-1}$ es $\dfrac{1}{5}$.

b) Se requiere encontrar el módulo de z y el ángulo que este forma con respecto al eje real. Luego,

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Por otro lado, como $z = -1 + i = (-1, 1)$ está en el segundo cuadrante:

$$\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

Luego, la forma polar es:

$$\boxed{z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}$$

c) Las raíces cuadradas de z son:

$$w_k = \sqrt{|z|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1.$$

En nuestro caso, $|z| = \sqrt{2}$ y $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$, entonces:

$$\boxed{w_1 = 2^{1/4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)}$$

$$\boxed{w_2 = 2^{1/4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{8}\right)\right)}.$$

Problema 2. (6 pts)

Sean $A(1,0,1)$ y $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ un punto y un vector del espacio respectivamente.

a) Determine la ecuación vectorial de la recta L que pasa por el punto A y tiene a $\mathbf{d}$ como vector director.

b) Encuentre la ecuación del plano P ortogonal a la recta obtenida en a) y que pasa por el punto $B(0,2,1)$.

c) Verifique que el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal al vector normal del plano P encontrado en b).

Solución

a) La ecuación vectorial de la recta es:

$$L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

b) El plano P al ser ortogonal a la recta L tiene como vector normal el vector director de la recta. Es decir,

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Además, como P pasa por el punto B, su ecuación es:

$$P : \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \boxed{P : 2x - y + 3z = 1}$$

c) Para verificar que $\mathbf{u}$ es ortogonal al vector normal $\mathbf{n}$ del plano basta calcular el producto punto entre ellos y obtener cero como resultado.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^\top \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)(2) + (1)(-1) + (1)(3) = -2 - 1 + 3 = 0$$

Como el producto punto es cero, entonces los vectores son ortogonales.

Problema 3. (6 pts)

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Demuestre que las columnas de A corresponden a un conjunto de vectores linealmente dependientes (L.D) de $\mathbb{R}^3$.

b) Encuentre la combinación lineal que permite escribir la columna linealmente dependiente de A en función de las otras dos columnas.

c) Decida si el sistema de ecuaciones no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es o no consistente. Justifique su respuesta.

Solución

a) Para demostrar que las columnas de A corresponden a un conjunto linealmente dependiente de vectores en $\mathbb{R}^3$ se utiliza la definición de conjunto L.D. Si llamamos

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a las columnas de la matriz, estos vectores serán linealmente dependientes si y sólo si existen escalares $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, no todos nulos tales que

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Esto es equivalente a que el sistema de ecuaciones homogéneo $(*)$ posea soluciones no triviales, es decir, infinitas soluciones. Esto, a su vez, es equivalente a que el rango de A sea menor que el número de incógnitas.

Escalonando la matriz A se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $ran(A) = 2 < 3$ (número de incógnitas), entonces las columnas de A corresponden a un conjunto de vectores linealmente dependientes de $\mathbb{R}^3$.

b) El conjunto solución del sistema $(*)$ es:

$$
\begin{aligned}
S &= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : c_1 + 13c_3 = 0 \wedge c_2 + 5c_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} : c_1 = -13c_3 \wedge c_2 = -5c_3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -13c_3 \\ -5c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}, c_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ c_3 \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, c_3 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

Los vectores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ de S son tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Tomando $c_3 = 1$ obtenemos la relación

$$
-13\,\mathbf{v}_1 - 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{v}_3 = 13\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2.}
$$

Es decir, la tercera columna de A es combinación lineal de las dos restantes.

c) Para estudiar si el sistema es o no consistente, se analiza el rango de la matriz ampliada asociada:

$$
(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 8 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)
$$

Como $ran(A) = 2$ y $ran(A|B) = 3$ entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ es inconsistente.

Problema 4. (6 pts)

Considere las matrices

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.
$$

a) Encuentre la matriz $M = 2A - B^{\top}$.

b) Pruebe utilizando resultados vistos en clases que M es invertible.

c) Encuentre M^{-1}.

Solución

a) Primero calculamos:

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$M = 2A - B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Se calcula el rango de M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $ran(M) = 3$ entonces M es invertible.

c) Se considera la matriz ampliada $(M \mid I)$ y hacemos operaciones fila:

$$(M \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$