uah/ Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
PAUTA Solemne 3
Segundo Semestre 2025

Problema 1.

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz $C = AB^\top - 3I_3$.

b) ¿Es $C = AB^\top - 3I_3$ invertible? Justifique su respuesta.

c) Determine si el vector $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ puede escribirse como combinación lineal de las columnas de la matriz C.

Solución

a)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz C no es invertible porque tiene $rank(C) = 2$ y la matriz es de tamaño 3×3.

c) El vector $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de las columnas de C si y sólo si el sistema $Cx = v$ es consistente. Consideramos la matriz aumentada del sistema:

$$(C|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Por la última fila de la matriz escalonada, el sistema no tiene solución, por lo que el vector v no puede escribirse como combinación lineal de las columnas de C.

Problema 2.

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
Justifique su respuesta.

a) Si X, A, B son matrices tales que

$$X(A+B) = (A+X)B,$$

entonces $X = B$.

b) La multiplicación de matrices siempre se puede calcular entre dos matrices del mismo tamaño.

c) Para encontrar la tercera columna de una matriz B, basta con resolver el sistema

$$Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

a) FALSO.

Definimos $X = A =$ matriz nula y $B =$ matriz identidad, entonces se cumple la igualdad, pero $X \neq B$.

b) FALSO.

Si A y B son dos matrices de 3×2, la multiplicación AB no está bien definida. La condición es que la cantidad de columnas de la matriz A sea igual a la cantidad de filas de B.

c) FALSO.

Para determinar la tercera columna de B se debe calcular $x = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, lo que equivale a $B^{-1}x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, si B es invertible.

Por lo tanto, en este caso, resolver el sistema $Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entrega como solución la tercera columna de la inversa B^{-1} y no de B.

Problema 3.

Considere la matriz

$$A = [a_{ij}]_{3\times 3} \qquad \text{donde} \qquad a_{ij} = \begin{cases} i+j+1, & \text{si } i<j, \\ i, & \text{si } i=j, \\ j-1, & \text{si } i>j. \end{cases}$$

a) Escriba explícitamente la matriz A.

b) Determine si las columnas de A son linealmente independientes.

c) Sea $\mathbf{v}$ un vector tal que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ es consistente. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Justifique.

Solución

a) La entrada a_{ij} de la matriz corresponde a la entrada en la fila i y columna j. De esta forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Determinamos una forma escalonada de A sumando la segunda fila a la tercera, multiplicada por (-1/2):

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De acá tenemos que $rank(A) = 2$ por lo que las columnas de A son linealmente dependientes.

c) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ es un sistema consistente, debe tener infinitas soluciones puesto que A tiene rango 2 (tiene variables libres).