uah/ Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Pauta Control 3
Segundo Semestre 2025

Pregunta 1. (6 puntos)

Considere las matrices

$$A = [a_{ij}]_{3\times 3} \quad \text{donde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 2ij, & \text{si } i < j, \\ i - j, & \text{si } i \geq j, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine la matriz A.

Solución

La matriz $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ está definida de modo que a_{ij} corresponde a la entrada ubicada en la fila i y la columna j. Cada elemento se calcula según la regla:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2ij, & \text{si } i < j, \\ i - j, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Evaluando cada posición:

- Para $i = 1$: $a_{11} = 1 - 1 = 0$, $\quad a_{12} = 2\cdot 1\cdot 2 = 4$, $\quad a_{13} = 2\cdot 1\cdot 3 = 6$.
- Para $i = 2$: $a_{21} = 2 - 1 = 1$, $\quad a_{22} = 2 - 2 = 0$, $\quad a_{23} = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$.
- Para $i = 3$: $a_{31} = 3 - 1 = 2$, $\quad a_{32} = 3 - 2 = 1$, $\quad a_{33} = 3 - 3 = 0$.

La matriz resultante es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Es A invertible? En caso de serlo, obtenga la segunda columna de A^{-1} pero **sin calcular la inversa explícitamente**.

Solución

Para determinar si la matriz A es invertible, se usa el hecho de que

$$A \text{ es invertible } \iff Ax = e_2 \text{ tiene solución única.}$$

Además, si A es invertible, la solución del sistema $Ax = e_2$ corresponde exactamente a la segunda columna de A^{-1}. Se arma la matriz aumentada y se aplica eliminación gaussiana:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -24 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & -24 & -2 \\ 0 & 0 & 102 & 8 \end{array}\right].$$

De la última fila:

$$x_3 = \frac{8}{102} = \frac{4}{51}.$$

Haciendo sustitución hacia atrás:

$$x_2 = -2 + 24\left(\frac{4}{51}\right) = -\frac{2}{17},$$

$$x_1 = 1 - 12\left(\frac{4}{51}\right) = \frac{1}{17}.$$

El sistema tiene solución única, por lo tanto A es invertible. La solución del sistema corresponde exactamente a la segunda columna de A^{-1}:

$$\boxed{\text{segunda columna de } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} \\ -\frac{2}{17} \\ \frac{4}{51} \end{pmatrix}.}$$

c) Determine si la matriz $BA^\top$ es una matriz simétrica o no.

Solución

Calculamos $BA^\top$:

$$BA^\top = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 & 1 \\ -8 & -25 & -1 \\ -2 & -12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que una matriz sea simétrica debe cumplirse $BA^\top = (BA^\top)^\top$. Sin embargo, basta comparar una sola entrada:

$$(BA^\top)_{12} = 13, \qquad (BA^\top)_{21} = -8.$$

Como estos valores son distintos, la matriz no es simétrica.

d) Despeja la matriz X de la ecuación matricial $X(A + A^2) = A(-2I_3 + X)$. No es necesario que la calcule numéricamente, solo dejar expresado en función de A.

Solución

En este problema faltó la hipótesis que las matrices A y X conmutan.

Propiedad distributiva:

$$XA + XA^2 = -2AI_3 + AX$$

Conmutatividad de X y A y propiedad de la matriz identidad:

$$XA + XA^2 = -2A + XA$$

Restamos a ambos lados la matriz XA:

$$XA^2 = -2A$$

Multiplicamos a la izquierda por A^{-2}:

$$(XA^2)A^{-2} = (-2A)A^{-2}$$

Asociatividad de la multiplicación:

$$X(A^2A^{-2}) = -2(AA^{-2})$$

Propiedad de potencias:

$$XI_3 = -2A^{-1}$$

Propiedad de la matriz identidad:

$$X = -2A^{-1}$$

e) Decida si el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio generado por las columnas de la matriz B.

Solución

Buscamos una forma escalonada de B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f2+f1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f2 \leftrightarrow f1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior implica que B es matriz invertible. Por propiedad de matriz invertible, todos los sistemas $Xy = b$ tienen solución para todo vector b, en particular, el sistema $Bx = v$. Por lo tanto, v si es combinación lineal de las columnas de X.

f) ¿Las columnas de B son linealmente dependientes? Justifique.

Solución

Como B es una matriz invertible, entonces sus columnas deben ser vectores linealmente independientes. Por lo tanto, NO son linealmente dependientes.