PAUTA de CORRECCIÓN SOLEMNE 3 ÁLGEBRA 2

P1. Sean $A, X \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i-j & \text{si} \quad i<j \\ j & \text{si} \quad i=j \\ i+j & \text{si} \quad i>j \end{cases}$ y X invertible.

a) Determine la matriz A. **(0.5 puntos)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.5 puntos)}}$$

b) Encuentre $det(A)$. **(0.7 puntos)**

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 9 & 11 \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \cdot M_{i1} \cdot a_{i1} \quad \text{fijando } j=1 \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.4 puntos)}} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot M_{11} \cdot a_{11} \\
&= M_{11} \\
&= \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 11 \end{vmatrix} \\
&= (5)(11) - (5)(9) \\
&= 55 - 45 \\
&= 10 \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.3 puntos)}}
\end{aligned}$$

c) Considere la ecuación matricial $2A^tX^{-1} = X$, encuentre los posibles valores para $det(X)$. **(0.8 puntos)**

Aplicamos determinante en ambos lados:

$$\begin{aligned}
det(2A^tX^{-1}) = det(X) &\iff 2^3 \cdot det(A^t) \cdot det(X^{-1}) = det(X) \\
&\iff 8 \cdot det(A) \cdot \frac{1}{det(X)} = det(X) \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.3 puntos)}} \\
&\iff (det(X))^2 = 8 \cdot det(A) \\
&\iff det(X) = \pm 8 \cdot 10 \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.3 puntos)}} \\
&\iff det(X) = \pm\sqrt{80} \\
&\iff det(X) = \pm 4\sqrt{5} \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.2 puntos)}}
\end{aligned}$$

P2. Sea $C = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} \right\}$ conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre el valor de k de modo que el conjunto C sea linealmente dependiente. **(1 punto)**

Sean α, β y γ escalares tales que:

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 17 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)}$$

Se analiza la matriz de coeficientes para obtener su rango.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 17 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 puntos)}$$

Para que el conjunto de vectores sea $l.d$ debe ocurrir que $ran(A) < 3$ ($n°$ de incógnitas). **(0.2 puntos)**

Luego,

$$ran(A) < 3 \Longleftrightarrow k - 3 = 0 \Longleftrightarrow k = 3 \quad \textbf{(0.1 puntos)}$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores es linealmente dependiente si y sólo si $k = 3$.

b) Para el valor de k encontrado, exhiba la relación de dependencia entre los vectores v_1, v_2 y v_3. **(0.5 puntos)**

Para encontrar la relación de dependecia entre los vectores que forman el conjunto C se debe observar la columna que no tiene pivotes de la matriz escalonada reducida por fila, es decir la columa 3 **(0.3 puntos)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí se tiene que la relación de dependencia buscada es $v_3 = \mathbf{3}v_1 + \mathbf{4}v_2$. **(0.2 puntos)**

P3. Determine si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Se debe justificar todo, tanto verdaderas como falsas. La justificación se debe hacer con lenguaje matemático. No con palabras.

a) Sea A la matriz obtenida en **P1**. letra a) y sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces la matriz $A^t + 2B$ es simétrica. **(0.5 puntos)**

$$A^t + 2B \text{ es simétrica si y sólo si } A^t + 2B = (A^t + 2B)^t$$

Calculamos

$$\begin{aligned} A^t + 2B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & 10 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 12 \\ -1 & 8 & 15 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Mientras que

$$\begin{aligned} (A^t + 2B)^t &= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 12 \\ -1 & 8 & 15 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 1 & 8 & 1 \\ 12 & 15 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Como $A^t + 2B \neq (A^t + 2B)^t$, la matriz $A^t + 2B$ no es simétrica y la afirmación es **falsa.** **(0.1 puntos)**

b) Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - 4y - 8z - 3t = 0 \wedge 3x - 2y - 9z + t = 0 \right\}$ subespacio de $\mathbb{R}^4$, entonces una base de W está constituida por los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **(1 punto)**

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - 4y - 8z - 3t = 0 \wedge 3x - 2y - 9z + t = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \begin{array}{r} x - 4y - 8z - 3t = 0 \\ 3x - 2y - 9z + t = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & -3 \\ 3 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \textbf{(0.1 puntos)}
\end{aligned}
$$

Escalonamos la matriz de coeficientes:

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & -3 \\ 3 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.3 puntos)}
$$

Como $ran(A) = 2 < 4 = n^\circ$ de incógnitas, entonces el sistema tiene infinitas soluciones que se expresan en función de uno o más parámetros. **(0.1 puntos)**

Volviendo a W se tiene:

$$\begin{aligned}
W &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 & -3 \\ 3 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : x - 2z + t = 0 \wedge y + \frac{3}{2}z + t = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad : x = 2z - t \wedge y = -\frac{3}{2}z - t \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2z - t \\ -\frac{3}{2}z - t \\ z \\ t \end{pmatrix} : z, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.1 puntos)}} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ -\frac{3}{2}z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad : z, t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad : z, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \textcolor{red}{\textbf{(0.1 puntos)}}
\end{aligned}$$

Sea $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Observar que dicho conjunto genera al subespacio W **(0.1 puntos)** y además por estar constituido por dos vectores ninguno múltiplo escalar del otro, entonces el conjunto es linealmente independiente **(0.1 puntos)**. Luego, $\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ constituye una base para W, por lo que la afirmación es **verdadera**. **(0.1 puntos)** *c*) El vector $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio generado por el conjunto $\{v_1, v_2\}$ donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

$$\begin{aligned} v \in Gen\,\{v_1, v_2\} &\iff \text{existen escalares } \alpha \text{ y } \beta \text{ tales que } v = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \textbf{(0.1 puntos)} \\ &\iff \text{existen escalares } \alpha \text{ y } \beta \text{ tales que } \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \text{existen escalares } \alpha \text{ y } \beta \text{ tales que } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{es compatible} \quad \textbf{(0.2 puntos)} \end{aligned}$$

Para estudiar la compatibilidad del sistema, se debe analizar la matriz ampliada.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ -\dfrac{3}{2} & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{(0.3 puntos)}$$

Como $ran(A) = 2$ **(0.1 puntos)** y $ran(A; B) = 3$ **(0.1 puntos)** entonces el sistema es incompatible (sin solución) **(0.1 puntos)**. Por lo tanto los escalares α y β tales que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ **no** existen **(0.1 puntos)**. Luego, el vector $v \notin Gen\,\{v_1, v_2\}$ y la afirmación es **falsa**.