PRE SOLEMNE 3 ÁLGEBRA 2

P1. Sea

$$[A|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} k^2+1 & -2(k^2+1) & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & k-4 & 0 \end{array}\right]$$

la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones homogéneo.

a) Determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para el valor de k obtenido en la parte *a*), resuelva lo siguiente:

1) Encuentre un conjunto generador de vectores de las infinitas soluciones del sistema.

2) Describa geométricamente el conjunto generador de las soluciones (por ejemplo, si corresponde a una recta o un plano en $\mathbb{R}^3$).

3) Determine si el conjunto de vectores que genera a las soluciones del sistema es linealmente dependiente o independiente.

P2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique matemáticamente sus respuestas.

a) Sea M matriz $n \times n$ tal que $M^\top M$ es invertible. La matriz

$$A = I_n - M(M^\top M)^{-1}M^\top.$$

corresponde a la inversa de M.

b) Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, entonces el conjunto de vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

c) Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ con v_1 diferente al vector nulo, y $v_2 = \lambda v_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $Gen(\{v_1, v_2\})$ es una recta que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$.

P3. Considere las matrices

$$A = [a_{ij}]_{3\times 3} \quad \text{donde} \quad a_{ij} = \begin{cases} 2i-j, & \text{si } i<j, \\ i-j, & \text{si } i \geq j, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine la matriz A.

b) ¿Es A invertible? En caso de serlo, obtenga la segunda columna de A^{-1} pero **sin calcular la inversa explícitamente**.

c) Muestre que la matriz $BA^\top$ es una matriz simétrica.

d) Resuelva la ecuación matricial $A(I_3 - AX) = AX - A$, donde A es la matriz del item *a*).

e) Decida si el vector $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}^\top$ pertenece al espacio generado por las columnas de la matriz X.