

Álgebra II

Guía 7: Operaciones con matrices

Operaciones con matrices

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En los siguientes ejercicios, calcule las matrices indicadas (si es posible).

- | | |
|------------------|---------------------------------|
| (a) $A + 2D$ | (i) $E(AF)$ |
| (b) $2D - 5A$ | (j) $F(AF)$ |
| (c) $B - C$ | (k) FE |
| (d) $B - C^\top$ | (l) EF |
| (e) AB | (m) $B^\top C^\top - (CB)^\top$ |
| (f) B^2 | (n) $DA - AD$ |
| (g) $D + BC$ | (o) A^3 |
| (h) $B^\top B$ | (p) $(I_2 - A)^2$ |

2. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 5 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule si es posible:

$$E + C, \quad CB + D, \quad AB, \quad BA, \quad AB + D^2, \quad A^\top D, \quad A(BD), \quad (AB)D,$$

$$A(C + E), \quad AC + AE, \quad 3A + 2B^\top, \quad (AB)^\top, \quad B^\top A^\top, \quad (C + E)^\top, \quad C^\top + E^\top.$$

3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) Calcule $A^2, A^3, \dots, A^7$. | (b) Determine A^{2025} y justifique su respuesta. |
|--------------------------------------|---|

4. Sea

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Determine B^{2025} .

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Demuestre que

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

6. En cada caso, construya la matriz 4×4 :

(a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

(c) $a_{ij} = (i-1)^j$

(b) $a_{ij} = j - i$

(d) $a_{ij} = \operatorname{sen}\left(\frac{(i+j-1)\pi}{4}\right)$

7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine si existen AB y BA , y calcúelos si es posible.

8. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule A^2, A^3, A^4 y conjeture la forma de A^n .

9. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule B^2, B^3, B^4 y describa el patrón de B^n .

10. Use vectores estándar para calcular $e_1^\top A$ y Ae_2 , donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Resuelva $AX = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Álgebra matricial

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resuelva para X :

(a) $X - 2A + 3B = O$

(b) $3X = A - 2B$

(c) $2(A + 2B) = 3X$

(d) $2(A - B + 2X) = 3(X - B)$

2. Demuestre que, para matrices cuadradas A y B , se cumple $AB = BA$ si y sólo si

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

3. Encuentre condiciones de a, b, c y d para las que $AB = BA$.

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre las condiciones de a, b, c y d para los que

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

conmuta tanto con

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{como con} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k , si los hay, harán que $AB = BA$?

6. En los siguientes ejercicios, resuelva la ecuación para X , dado que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(a) \quad X - 2A + 3B = O$$

$$(c) \quad 2(A + 2B) = 3X$$

$$(b) \quad 3X = A - 2B$$

$$(d) \quad 2(A - B + 2X) = 3(X - B)$$

7. Calcule la transpuesta de:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Considerando las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

determine:

(a) Los valores de a, b y c de modo que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ -3 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = (BA)^{\top}.$$

(b) Usando los valores de a, b y c calculados anteriormente, obtenga la matriz X que satisface:

$$2 \left(AA^{\top} + \begin{bmatrix} 5-b & 2 \\ 5+a & c-4 \end{bmatrix} - X^{\top} \right) = 2BI_2,$$

donde I_2 es la matriz identidad de orden 2.

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule $(A\mathbf{x})^\top$, $\mathbf{x}^\top A^\top$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ y $\mathbf{x}^\top \mathbf{x}$. ¿Está definida $A^\top \mathbf{x}^\top$?

10. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$, determine la primera y la segunda columnas de B .

11. Una matriz cuadrada se llama antisimétrica si $A^\top = -A$. ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Matrices invertibles

1. Encuentre la inversa de la matriz dada (si existe).

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$, donde ni a, b, c, d son 0.

(d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre A^{-1} y úselo para resolver los tres sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$.

(b) Resuelva los tres sistemas al mismo tiempo mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \mathbf{b}_3]$, usando la eliminación de Gauss-Jordan.

3. Resuelva la ecuación matricial dada para X . Simplifique sus respuestas tanto como sea posible. Suponga que todas las matrices son invertibles.

(a) $XA^{-1} = A^3$

(c) $(A^{-1}X)^{-1} = (AB^{-1})^{-1}(AB^2)$

(b) $AXB = (BA)^2$

(d) $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

4. (a) Demuestre que si A es invertible y $BA = CA$, entonces $B = C$.

(b) Ofrezca un contraejemplo para demostrar que el resultado en el inciso (a) puede fallar si A no es invertible.

5. Resuelva para X la ecuación

$$AXB = C,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Use el algoritmo de Gauss – Jordan para encontrar la inversa de la matriz dada (si es que existe)

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. Sea A tal que

$$A^2 - 3A + 2I = O.$$

Demuestre que A es invertible y encuentre A^{-1} .