uah/ Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Guía 6: Dependencia e Independencia Lineal

1. Determine si los siguientes vectores son linealmente independientes. Para aquellos que sean linealmente dependientes, encuentre una relación de dependencia entre ellos.

   (a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$

   (d) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (e) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

   (f) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (g) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

   (h) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (i) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (j) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. Determine si las columas de la matriz forman un conjunto linealmente independiente. Para aquellas columnas que formen un conjunto linealmente dependiente encuentre una relación de dependencia entre ellas.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -10 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sea linealmente independiente y linealmente dependiente.

(a)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} k \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ k \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ k \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ k \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ k-3 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}.$$

(e)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ k \end{bmatrix}.$$

4. Considere el plano P de ecuación $2x - y - z = 0$.

(a) Determine un conjunto de vectores que genere ese plano.

(b) Demuestre que los vectores encontrados son linealmente independientes.

5. Encuentre los vectores que generan el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Luego, demuestre que dichos vectores son linealmente independientes.

(a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Sea
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0 \ \wedge \ x + y + z - 2t = 0 \right\}$$

   (a) Encuentre los vectores que generan al conjunto W.

   (b) Demuestre que dichos vectores son linealmente independientes.

   (c) Escriba el vector
   $$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   como combinación lineal de los vectores que generan a W.

   (d) Describa geométricamente el conjunto W (por ejemplo, indique si corresponde a una recta, un plano, etc.)

7. Verifique que las filas no nulas de la matriz escalonada reducida por fila de cada una de las siguientes matrices forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$, donde n corresponde al número de columnas de la matriz.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

   (c)
   $$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

   (d)
   $$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

8. Si los vectores $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$, determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.

   (a) $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}\}$

   (b) $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$

9. Determine si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifique matemáticamente su respuesta.

   (a) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Si el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente y $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente, entonces $\mathbf{w} \in Gen(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$.

   (b) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes, y si $\mathbf{w} \in Gen(\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\})$, entonces los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

   (c) Sea P el plano generado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Entonces para todo vector $\mathbf{w} \in P$ se tiene que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   (d) Si una matriz A de orden 6×4 tiene columnas linealmente independientes, entonces $ran(A) = 6$.

   (e) Las columnas de cualquier matriz B de tamaño 4×5 son linealmente independientes.

   (f) Si $a \neq 2$ y $a \neq -1$, entonces el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

   (g) Si $\mathbf{0} \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces S es linealmente dependiente.

10. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vectores distintos del vector nulo. Demuestre que
$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \text{ es linealmente dependiente } \iff \mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$