uah / Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Pauta de corrección Solemne 2
Segundo Semestre 2025

Pregunta 1.

Sean $A(1,1,1), B(4,1,5)$, y $C(1,5,1)$ puntos en el espacio. Defina los vectores

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{w} = \overrightarrow{BC}.$$

Use los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ para responder a los siguientes problemas:

a) Pruebe que el $\triangle ABC$ es rectángulo.

b) Determine el perímetro del triángulo ABC.

c) Determine las ecuaciones paramétricas del plano $\mathcal{P}$ que pasa por los puntos A, B y C.

d) Determine la ecuación vectorial de la recta L que pasa por $A(1,1,1)$ y es paralela al vector normal del plano $\mathcal{P}$ del ítem (c).

Solución

Para responder *a*) y *b*) es necesario conocer los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y además sus normas.

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Respecto a las normas:

$$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{16} = \boxed{4}$$

$$\| \mathbf{w} \| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16 + 16} = \boxed{\sqrt{41}}$$

a) Para demostrar que el triángulo es rectángulo, basta probar que tiene un ángulo recto.
Como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = (3)(0) + (0)(4) + (4)(0) = \boxed{0}$$

entonces los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales y por tanto el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo.

b) Para obtener el perímetro del triángulo basta sumar las norma de los vectores **u**, **v** y **w**.

$$\text{Perímetro} = \parallel \mathbf{u} \parallel + \parallel \mathbf{v} \parallel + \parallel \mathbf{w} \parallel = 5 + 4 + \sqrt{41} = \boxed{9 + \sqrt{41}}$$

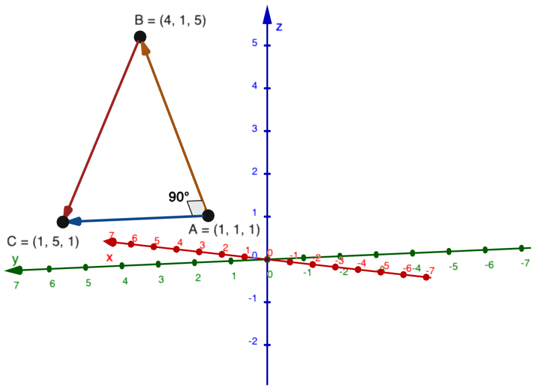

Figure 1: Triángulo rectángulo formado con $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$.

c) En el siguiente gráfico se observa el plano $\mathcal{P}$ que pasa por los puntos A, B y C.

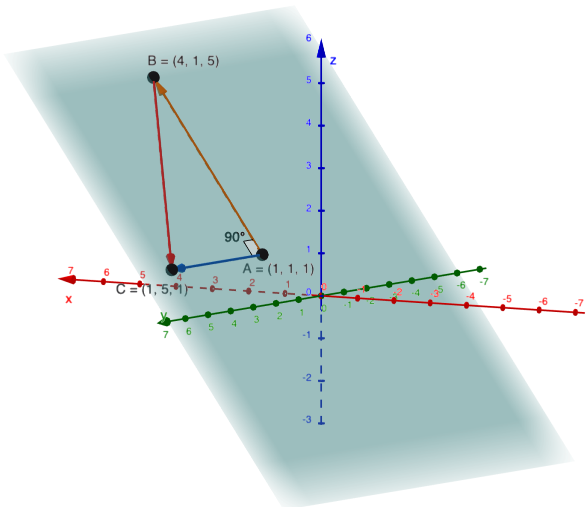

Figure 2: Plano que pasa por los puntos A, B y C.

Para hallar las ecuaciones paramétricas, primero se obtendrá la ecuación vectorial del plano, y a partir de ella las ecuaciones pedidas.

La ecuación vectorial del plano $\mathcal{P}$ es:

$$\mathcal{P} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{u} \quad \text{con} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

donde **p** es un punto que pertenece al plano, mientras que **v** y **u** son dos vectores directores.

Para el punto que pertenece al plano, considerar, sin perdida de generalidad a $A(1,1,1)$. Mientras que para los vectores directores

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego, la ecuación vectorial viene dada por

$$\mathcal{P}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Igualando componentes, se tiene que las ecuaciones paramétricas del plano $\mathcal{P}$ son:

$$\boxed{\mathcal{P}: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4s \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}}$$

d) La ecuación vectorial de una recta L que pasa por un punto **p** con vector director **d** es:

$$L: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbf{R}$$

El punto por donde pasa la recta es $A(1,1,1)$, mientras que el director es un vector paralelo al vector normal **n** del plano $\mathcal{P}$ encontrado en el item anterior.

Calculando el vector normal se obtiene:

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

El vector $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ es paralelo al vector normal al plano. Luego, la ecuación vectorial de L es:

$$\boxed{L: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

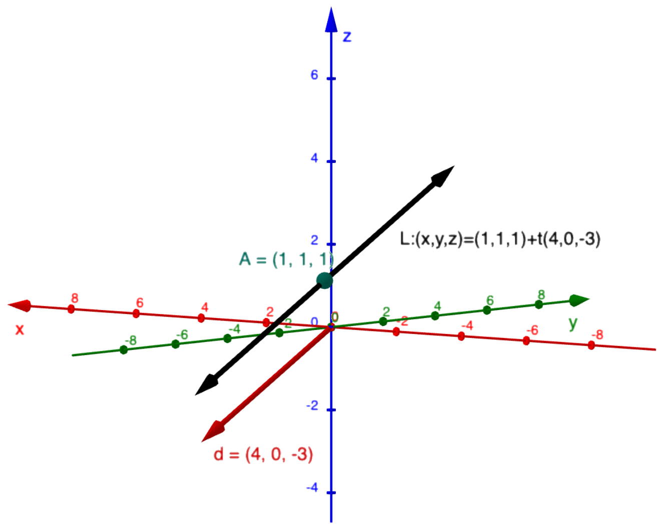

Figure 3: Recta L que pasa por $A(1,1,1)$ con director $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Pregunta 2.

Considere un sistema de ecuaciones homogéneo cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & k & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

a) Exprese la matriz en forma escalonada por fila.

b) Determine el valor de k de modo que el sistema homogéneo tenga infinitas soluciones, única solución o no tenga solución.

c) Describa geométricamente el conjunto de soluciones en ese caso.

Solución

a) Escalonando se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & k & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\, F_3-3F_1]{F_2:\, F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & k+2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_3 \longleftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & k+2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\,:\,3F_2+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+5 & 0 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la matriz escalonada por fila es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+5 & 0 \end{array}\right]$$

b) Se analizan las soluciones dependiendo del valor del parámetro k:

- Si $k = -5$ se tiene
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
Como el rango de esta matriz es igual a $2 < 3$ (número en incógnitas), entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $k \neq -5$,
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+5 & 0 \end{array}\right]$$
tiene rango 3, lo que coincide con el número de incógnitas, y entonces el sistema tiene única solución.
- Los sistemas homogéneos son siempre consistentes, por lo tanto no existe ningún valor de k para el cual el sistema no tenga solución.

En resumen,

- Si $k = -5$, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $k \neq -5$, el sistema tiene solución única.
- No existe $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema no tiene solución.

c) Para determinar la representación geométrica de las soluciones del sistema, se analizan los casos cuando $k = -5$ y $k \neq -5$.

- Si $k = -5$ se tiene
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\,:\,-\frac{1}{6}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\,:\,F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
El sistema de ecuaciones homogéneo asociado a esta matriz es:
$$\left\{\begin{array}{rcl} x - \frac{3}{2}z & = & 0 \\ y + \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array}\right.$$
Luego, el conjunto de soluciones es:
$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - \frac{3}{2}z = 0, y + \frac{1}{2}z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = \frac{3}{2}z, y = -\frac{1}{2}z \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} : t = z,\ t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Geométricamente, S describe una recta en el espacio que pasa por el origen cuyo vector director es $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, o cualquier vector paralelo a este, como por ejemplo $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

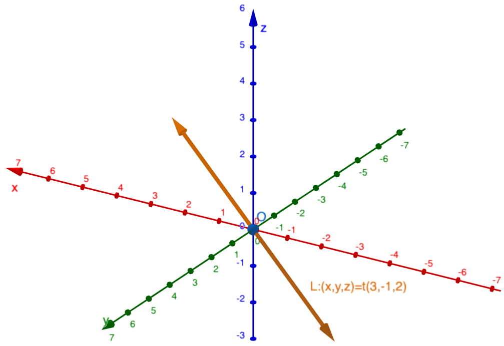

Figure 4: Recta L que pasa por el origen con director $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- Cuando $k \neq -5$ se tiene que el rango de la matriz de coeficientes del sistema es igual al número de incógnitas. En tal caso, el conjunto solución es:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Lo que geométricamente representa el origen del espacio $\mathbb{R}^3$.

Pregunta 3.

Considere el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 3x_3 - 6x_4 &= 9. \\ x_3 - 2x_4 &= 10 \end{cases}$$

a) Demostrar, usando el rango de matrices, que el sistema es inconsistente.

b) Para que el sistema **sí** tenga solución, ¿por cuál número se debe reemplazar el 10 en la cuarta ecuación?.

c) Para el sistema corregido en *b)*, este, ¿tiene solución única o infinitas soluciones? Fundamente su respuesta.

Solución

a) Se escalona la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\,\frac{1}{3}F_3]{F_2:\,\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\,:\,F_2-F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_4\,:\,F_4-F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

Notar que $r(A) = 3$, mientras que $r(A|B) = 4$. Como $r(A) \neq r(A|B)$, entonces el sistema es inconsistente.

b) Si en la matriz aumentada del sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \mathbf{10} \end{array}\right]$$

se reemplaza el **10** por un **3**, se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \mathbf{3} \end{array}\right]$$

La fila 4 (F_4) es un múltiplo de la fila 3 (F_3): $F_4 = \frac{1}{3}F_3$. Por lo tanto, al hacer el escalonamiento, F_4 se transformará en una fila con solo ceros. En efecto:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \cdots \sim \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se observa que $r(A) = r(A|B)$ lo que implica que el sistema es consistente.

c) Como $r(A) = r(A|B) = 3 < 4$ (número de incógnitas) entonces el sistema tiene infinitas soluciones.