

Álgebra II

Guía 5: Combinaciones lineales y conjuntos generadores

1. Determine si el vector $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores restantes. En caso de serlo, exprese $\mathbf{v}$ como combinación lineal de dichos vectores.

$$(a) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(f) \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

2. Encuentre el conjunto generado por los vectores que se indican. Luego muestre un vector que pertenezca a dicho conjunto y otro que no.

$$(a) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Demuestre que si $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \text{Gen} \left(\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right)$ entonces $x - 3y - 5z = 0$.

4. Sea $W = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. ¿El vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$ pertenece a $Gen(W)$?

5. Determine si el vector $\mathbf{b}$ pertenece al conjunto generado por las columnas de la matriz A .

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} & \text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Demuestre que:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \mathbb{R}^2 = Gen \left(\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right) \\ \text{(b)} \quad \mathbb{R}^2 = Gen \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right) \\ \text{(c)} \quad \mathbb{R}^3 = Gen \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \\ \text{(d)} \quad \mathbb{R}^3 = Gen \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \\ \text{(e)} \quad \mathbb{R}^4 = Gen \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right) \end{array}$$

7. Considere el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Encuentre $Gen(W)$.

(b) Determine si $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \in Gen(W)$.

8. Considere el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Encuentre un generador del espacio solución del sistema.

(b) Describa geoméricamente al generador encontrado.

9. Encuentre el generador de los vectores dados (a) algebraicamente y (b) geoméricamente.

$$(a) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10. Muestre que el espacio $\mathbb{R}^3$

(a) no está generado por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(b) pero que **sí** lo está por los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Determine la relación que debe existir entre los números reales a, b y c para que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \text{Gen}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$$

12. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$$

Determine los valores de a y b de modo que

$$\begin{bmatrix} 2b \\ b^2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Gen}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$$

13. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determine la relación que debe existir entre los números reales a, b, c y d para que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \text{Gen}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\})$$

14. Determine para que valores de k , se tiene que $\mathbb{R}^3$ es generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$$

15. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique matemáticamente sus respuestas.

- (a) Cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^2$ lo genera.
- (b) El generador de los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

corresponde a un plano de ecuación

$$\mathcal{P} : x + 2y - z = 0$$

- (c) El vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece al conjunto generado por los vectores

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (d) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{v}_1$ diferente al vector nulo, y $\mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{v}_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto $\text{Gen}(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\})$ es una recta que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$.