Álgebra II
Pauta de corrección Control 2
Segundo Semestre 2025

Considere las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \quad L_2 : \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

a) Si $\mathbf{d_1}$ y $\mathbf{d_2}$ son los vectores directores de L_1 y L_2 respectivamente, determine $\mathbf{d_1} \times \mathbf{d_2}$.

b) Determine la ecuación general del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $A(1, 2, -1)$ y tiene a $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ como vector normal.

c) Calcule el ángulo entre los vectores directores $\mathbf{d_1}$ y $\mathbf{d_2}$.

Solución:

a) Las ecuaciones vectoriales de las rectas son

$$L_1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d_1}}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \quad L_2 : \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d_2}}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Donde $\mathbf{d_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ son los vectores directores de L_1 y L_2 respectivamente.

Luego,

$$\mathbf{d_1} \times \mathbf{d_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(-2) - (1)(1) \\ (1)(1) - (1)(-2) \\ (1)(1) - (-2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b) Para determinar la ecuación general de un plano basta conocer un punto por el cual pase el plano, y un vector normal a él.

La ecuación general viene dada por

$$\mathcal{P} : \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

donde (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas de un punto por el cual pasa el plano, mientras que $\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ corresponde a un vector normal a él.

En este caso se tiene que el plano pasa por $A(1,2,-1)$ y tiene vector normal $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, la ecuación general del plano es

$$\mathcal{P}: \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Longrightarrow \mathcal{P}: x-1+y-2+z+1=0 \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}:\ x+y+z=2}$$

c) Los vectores directores de L_1 y L_2 son respectivamente

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

y el ángulo θ entre ellos se obtiene a través de la expresión

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}'}{\|\mathbf{d}\|\|\mathbf{d}'\|} = \frac{(1)(1)+(-2)(1)+(1)(-2)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1+4}} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{1}{2}$$

Luego, se debe resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

Dado que el ángulo θ entre dos vectores siempre está en el intervalo $[0°, 180°]$, y el coseno resultó ser negativo, la solución debe encontrarse en el segundo cuadrante. Por lo tanto, el ángulo es $\theta = 120°$.

Pregunta 2. (3 puntos) Considere los siguientes tres planos en el espacio, donde α es un parámetro real.

$$\mathcal{P}_1 : x + y + \alpha z = 1,\ \mathcal{P}_2 : x + \alpha y + z = 1,\ \mathcal{P}_3 : \alpha x + y + z = -2$$

a) Plantee el sistema de ecuaciones lineales que representa la intersección de los tres planos y escriba su matriz aumentada asociada.

b) Determine los valores de α para los cuales el sistema planteado en *a*), tiene solución única, infinitas soluciones y no tiene solución.

c) Para el valor de α que hace que el sistema no tenga solución, explique qué ocurre geométricamente con los tres planos.

Solución:

a) El sistema de ecuaciones lineales que representa la intersección de los tres planos es

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= -2 \end{cases}$$

mientras que la matriz aumentada asociada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

b) Se utilizan operaciones elementales fila para expresar la matriz anterior en su forma escalonada reducida por fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\ F_3-\alpha F_1]{F_2:\ F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 & -2-\alpha \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\,:\,F_3+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+2)(\alpha-1) & -(\alpha+2) \end{array}\right]$$

Observación: En la última operación realizada, al sumarle F_2 a F_3 se obtiene

$$1-\alpha^2+1-\alpha = -\alpha^2-\alpha+2 = -(\alpha^2+\alpha-2) = -(\alpha+2)(\alpha-1)$$

Ahora se analizan los diferentes valores para α:

- Si $\alpha = 1$ se otiene que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+2)(\alpha-1) & -(\alpha+2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

  De la fila tres se obtiene la contradiccion $0 = -3$. Por lo tanto, en este caso el sistema no tiene solución.

- Si $\alpha = -2$ se obtiene que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+2)(\alpha-1) & -(\alpha+2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\,:\,-\frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\,:\,F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Como $r(A) = r(A|B) = 2 < 3$ (número de incógnitas), entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, entonces las fracciones $\frac{1}{\alpha-1}$ y $\frac{1}{\alpha+2}$ están bien definidas, luego

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(\alpha+2)(\alpha-1) & -(\alpha+2) \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\ \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)}F_3]{F_2:\ \frac{1}{\alpha-1}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right]$$

  Como $r(A) = r(A|B) = 3$ (número de incógnitas), entonces el sistema tiene solución única.

c) El sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + y + \alpha z &= 1 \\ x + \alpha\, y + z &= 1 \\ \alpha x + y + z &= -2 \end{cases}$$

luego, para $\alpha = 1$ se obtiene

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= -2 \end{cases}$$

Geométricamente, las primeras dos ecuaciones representan al mismo plano, mientras que la tercera corresponde a un plano paralelo a los dos anteriores.