ÁLGEBRA 2
PAUTA PRE SOLEMNE 2
SEGUNDO SEMESTRE 2025

---

1. **Rectas y planos**

   Considere las rectas

$$L_1 : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad , \qquad L_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Obtenga una ecuación vectorial de L_1. Identifique un punto que pertenezca a L_1 y su vector director.

   b) Sea $\mathcal{P}$ el plano que pasa por $Q(2, -1, 1)$ y contiene a L_1. Exprese la ecuación de $\mathcal{P}$ en forma general, paramétrica y vectorial.

   c) Sea $\mathcal{P}'$ el plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2.

      I) Halle su ecuación general.

      II) Decida y justifique si $A(1, -2, 3)$ y $B(-2, 4, 1)$ pertenecen a $\mathcal{P}'$.

   d) Determine si el plano $\mathcal{P}$ encontrado en b) y la recta L_2 son paralelos, ortogonales o ninguno. Justifique.

   e) Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ los vectores normales de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$, respectivamente. Calcule $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.

   f) Calcule el producto punto entre los vectores directores de L_1 y L_2, y la norma del producto cruz entre ellos.

SOLUCIÓN:

   a) La recta L_1 corresponde a la intersección entre los planos dados por las ecuaciones

$$x + y - z + 2 = 0 \ , \ x - y + z - 2 = 0.$$

   Observar que

$$L_1 : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \implies L_1 : \begin{cases} x + y - z = -2, \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad (*)$$

   Para hallar la ecuación vectorial de L_1 se debe resolver el sistema de ecuaciones $(*)$. Para esto, se expresa la matriz ampliada o aumentada del sistema en su forma escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 : F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 : -\frac{1}{2}F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 : F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

   Por lo tanto,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

A partir de la matriz en su forma escalonada reducida por filas, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, que tiene las mismas soluciones que el sistema original

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ \quad y - z & = & -2 \end{cases} \iff x = 0, \quad y = -2 + z$$

Al hacer la variable libre $z = t$ se tiene que las infinitas soluciones del sistema son

$$L_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2+t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, una ecuación vectorial de la recta L_1 es

$$L_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Un punto que pertenece a L_1 se obtiene al asignar cualquier valor real al parámetro t. Al hacer $t = 0$, se obtiene el punto $P_0(0, -2, 0)$, cuyo vector de posición es

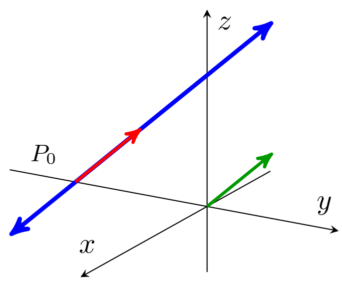
$$\overrightarrow{OP_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mientras que el vector director de la recta es

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

.

En la siguiente gráfica se observa el punto P_0, la recta L_1 representada en azul, un vector rojo aplicado en P_0 con la misma dirección que la recta, y el vector verde que corresponde al **vector director real** de L_1, el cual parte desde el origen.



b) Para definir un plano basta un punto del plano y un vector normal. En este problema, usaremos el punto Q dado en el enunciado como un punto del plano $\mathcal{P}$.

Por otro lado, como la recta L_1 está contenida en $\mathcal{P}$, su vector director es paralelo al plano, y además, todo punto que pertenezca a L_1 también pertenece a $\mathcal{P}$. Luego, en particular, como:

$$P_0(0, -2, 0) \in L_1 \Longrightarrow P_0(0, -2, 0) \in \mathcal{P}$$

Respecto al vector normal a $\mathcal{P}$, este puede obtenerse como el producto cruz entre el vector director de L_1 y el vector $\overrightarrow{P_0Q}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{d} \times \overrightarrow{P_0Q}$$

donde

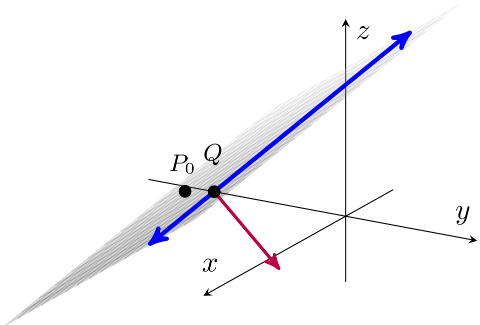
$$\overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{n} = \mathbf{d} \times \overrightarrow{P_0Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la **ecuación general** del plano $\mathcal{P}$ es:

$$\mathcal{P}: \begin{bmatrix} x-2 \\ y-(-1) \\ z-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \implies \mathcal{P}:\ 2(y+1) - 2(z-1) = 0 \implies \boxed{\mathcal{P}:\ y - z = -2}$$

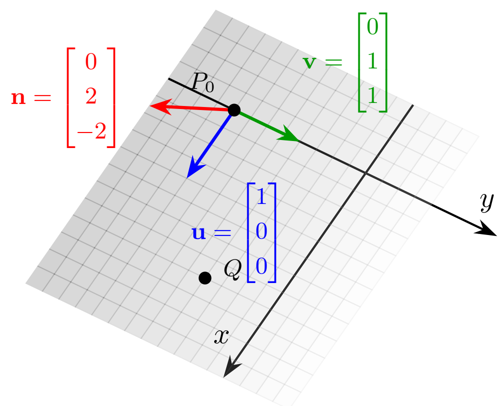


Para la ecuación vectorial, es necesario conocer un punto y dos vectores directores de $\mathcal{P}$. Estos últimos, serán denotados como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, mientras que para el punto se usará $Q(2,-1,1)$.

Los vectores directores, al pertenecer al plano, son ortogonales con el vector normal. Luego, un par de posibles vectores directores son

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En la figura se muestra el plano $\mathcal{P}: y - z = -2$, donde el vector rojo $\mathbf{n}$ es normal al plano, los vectores $\mathbf{u}$ (azul) y $\mathbf{v}$ (verde) pertenecen al plano y los puntos P_0 y Q se ubican sobre él.



La **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathcal{P}: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Mientras que las **ecuaciones paramétricas** son:

$$\mathcal{P}: \begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

c) El plano $\mathcal{P}'$ contiene a la recta

$$L_1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, el plano contiene al punto $P_0(0, -2, 0)$ y un vector normal viene dado por el producto cruz entre los vectores directores de L_1 y L_2. Entonces,

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la **ecuación general** del plano $\mathcal{P}'$ es:

$$\mathcal{P}': \begin{bmatrix} x \\ y-(-2) \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \implies \mathcal{P}: \ 3x + y - z = -2$$

d) Sea el plano

$$\mathcal{P}': \ 3x + y - z + 2 = 0.$$

Verificamos:

$$A(1,-2,3): \quad 3(1) + (-2) - 3 + 2 \ = \ 3 - 2 - 3 + 2 \ = \ 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \in \mathcal{P}'}.$$

$$B(-2,4,1): \quad 3(-2) + 4 - 1 + 2 \ = \ -6 + 4 - 1 + 2 \ = \ -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B \notin \mathcal{P}'}.$$

e) De (b) se tiene $\mathcal{P}: \ y - z = -2$, con normal $\mathbf{n_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{d}'$ denota el vector director de L_2, estonces $\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Respecto al plano $\mathcal{P}$ y la recta L_2, estos

- serán paralelos $\iff \mathbf{n_1} \perp \mathbf{d}' \iff \mathbf{n_1} \cdot \mathbf{d}' = 0$, y
- serán ortogonales $\mathbf{n_1} \parallel \mathbf{d}' \iff \mathbf{n_1}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{d}'$.

Como

$$\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{d}' = -3 \neq 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{n_1} \quad \text{no es múltiplo escalar de } \mathbf{d}'$$

entonces el plano $\mathcal{P}$ y la recta L_2 no son ortogonales ni paralelos. Conclusión: ninguno.

f) Los vectores normales de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son

$$\mathbf{n_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

g)

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$\mathbf{d}\times\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{d}\times\mathbf{d}'\| = \sqrt{(3)^2+(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{11}$$

2. **Análisis de compatibilidad**

Determine *por inspección* (sin realizar cálculos) si el sistema de ecuaciones lineales con la matriz aumentada dada tiene solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Justifique.

a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

b)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

c)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

d)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

SOLUCIÓN: A continuación se muestran algunas rutas de resolución posibles. Como el problema pide decidir *por inspección*, se sugiere efectuar las operaciones elementales de forma mental.

a) Como

$$(A;B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1\longleftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

entonces $r(A) = r(A;B) = 3$ (número de incógnitas). Luego, el sistema tiene solución única.

b) Como

$$(A;B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3\,:\,-2F_2+F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

de la última fila de la matriz escalonada reducida por fila se obtiene la contradicción $0 = 2$, por lo tanto el sistema no tiene solución.

c) Notar que el sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

al ser homogéneo, será compatible. Es decir, al menos una solución. Por otro lado, como

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\,-9F_1+F_3]{F_2:\,-5F_1+F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3:-2F_2+F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $r(A) = 2 < 3$ (número de incógnitas) entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

d) Observar que en

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

se tiene que $F_3 = F_1 + F_2$, por lo tanto

$$(A;B) = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3:\, F_3-(F_1+F_2)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2:\, -6F_1+F_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -7 & -14 & -21 & -28 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $r(A) = r(A;B) = 2 < 4$ (número de incógnitas) el sistema tiene infinitas soluciones.

3. **Parámetros y compatibilidad**

Considere el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z &= 1, \\ x + \alpha\, y + z &= 2, \\ x + y + \beta\, z &= 3. \end{cases}$$

Determine los valores de α y β para que el sistema tenga:

a) una única solución; en ese caso, calcule x, y, z en función de α y β.

b) ninguna solución.

c) infinitas soluciones.

SOLUCIÓN: Se expresa la matriz ampliada del sistema en su forma escalonada reducida por fila

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \beta & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\ F_3-F_1]{F_2:\ F_2-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 2 \end{array}\right] \quad (*)$$

Ahora se hace el análisis por casos:

- Si $\alpha - 1 \neq 0$ y $\beta - 1 \neq 0$, es decir, si $\alpha \neq 1$ y $\beta \neq 1$ se tiene que

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3:\ \frac{1}{\beta-1}F_3]{F_2:\ \frac{1}{\alpha-1}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\beta-1} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1:\, F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1-\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\beta-1} \end{array}\right] \xrightarrow{F_1:\, F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{\alpha-1}-\frac{2}{\beta-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\beta-1} \end{array}\right]$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es

$$x = 1 - \frac{1}{\alpha-1} - \frac{2}{\beta-1},\ y = \frac{1}{\alpha-1},\ z = \frac{2}{\beta-1}$$

- Si $\alpha = 1$, reemplazando en $(*)$ se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 2 \end{array}\right]$$

de la segunda fila se obtine la contradicción $0 = 1$. Por lo tanto, cuando $\alpha = 1$ el sistema no tiene solución.

- Si $\beta = 1$, reemplazando en $(*)$ se tiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

de la tercera fila se obtine la contradicción $0 = 2$. Por lo tanto, cuando $\beta = 1$ el sistema no tiene solución.

Por lo tanto,

$$\text{Si} \quad \alpha = 1 \quad o \quad \beta = 1 \Longrightarrow \text{el sistema no tiene solución (es inconsistente)}$$

- No hay más casos de α y β por analizar, nunca ocurre que el sistema tenga infinitas soluciones.

En resumen,

- Si $\alpha \neq 1$ y $\beta \neq 1$, el sistema tiene solución única.
- Si $\alpha = 1$ o $\beta = 1$, el sistema tiene no tiene solución.
- Nunca ocurre que el sistema tenga infinitas soluciones

4. **Forma escalonada reducida por fila de una matriz**

Encuentre la matriz escalonada reducida por filas equivalente a:

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & -8 \\ -1 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & -8 & -9 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

f)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN: Las matrices escalonadas reducidas por fila son

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Análisis del rango de una matriz**

Analice el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{bmatrix}$$

dependiendo de los valores de k.

SOLUCIÓN:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2k+3 & 3 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k(k+4) & k \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, cuando

$$k = 0 \Longrightarrow r(A) = 2, \qquad k \neq 0 \Longrightarrow r(A) = 3$$