Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Guía 4: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Determine cuál de las siguientes ecuaciones son lineales y cuáles no:
   (a) $x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0$
   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
   (c) $x^{-1} + 7y + z = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$
   (d) $2x - xy - 5z = 0$
   (e) $3\cos x - 4y + z = \sqrt{3}$
   (f) $(\cos 3)x - 4y + z = \sqrt{3}$

2. Encuentre las matrices aumentadas de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

   (a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

3. Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a cada matriz aumentada.

   (a) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$

   (b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$

   (c) $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$

   (d) $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

   (e) $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -5 \end{array}\right]$

   (f) $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -4 \end{array}\right]$

4. Dada la matriz, realice lo siguiente:
   - Identifique si la matriz está en **forma escalonada por renglones**.
   - Para aquellas matrices que sí lo estén, indique cuáles están además en **forma escalonada reducida por renglones**.
   - Para aquellas matrices que no cumplan con (a), reescríbalas en su **forma escalonada reducida por renglones**.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

(e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $F = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 5 & 12 & -8 \end{bmatrix}$

(g) $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(h) $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

5. Los estudiantes frecuentemente realizan el siguiente tipo de cálculo para introducir un cero en una matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, $3R_2 - 2R_1$ no es una operación elemental con renglones. ¿Por qué no? Demuestre cómo lograr el mismo resultado usando operaciones elementales con renglones.

6. Determine el rank o rango de las siguientes matrices.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

7. Respecto a los siguientes sistemas de ecuaciones,

- Determine si el sistema tiene solución única o infinitas soluciones.
- Resuelva cada uno de ellos.

(a) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$

(f) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 & = & 0 \end{array}\right.$

8. Encuentre la solución general del sistema cuya matriz aumentada es:

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

(e) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & -1 \end{array}\right]$

(f) $\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -8 & -4 \end{array}\right]$

9. Determine si los siguiente sistemas son consistentes. En caso de serlo, encuentre su solución general; si no lo es, explique por qué.

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 5 \\ 2x_1 - 5x_2 & = & -3 \\ -x_1 + 6x_2 & = & 1 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 - 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 3 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 & = & 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 & = & 2 \end{array}\right.$

(f) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & -1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 & = & 2 \end{array}\right.$

10. Encuentre la recta de intersección de los planos dados.

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & -1 \\ 2x - y + 4z & = & 5 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x + y - z & = & 0 \\ 2x - y + 3z & = & 4 \end{array}\right.$

11. Determine si las rectas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\,\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\,\mathbf{v}$ se intersectan y, si lo hacen, encuentre su punto de intersección.

(a) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $A = (-2, 3, 5)$ y contiene la recta L dada como intersección de los planos $2x - 3y + 5z = 1$ y $x + 2y - 5z = 3$.

13. Encuentre la ecuación del plano que pasa por $B = (1, -2, 3)$ y contiene la recta L dada como intersección de los planos $3x - y + 2z = 4$ y $x + 2y - z = 1$.

14. Sea la recta

$$L = \{\, (1, -3, 4) + t(2, 1, -5) \ : \ t \in \mathbb{R} \,\}.$$

(a) Encuentre dos planos Π_1 y Π_2 cuya intersección sea exactamente la recta L.

(b) Escriba el sistema de ecuaciones lineales formado por las ecuaciones de Π_1 y Π_2 y verifique, mediante su resolución, que el conjunto solución es L.

15. Considera el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y + z &= 1, \\ x + \alpha\, y + z &= 2, \\ x + y + \beta\, z &= 3. \end{cases}$$

Determina los valores de α y β para que el sistema tenga:

(a) una única solución,

(b) infinitas soluciones,

(c) ninguna solución.

16. Determine el rango de las siguientes matrices dependiendo del valor del parámetro.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & -a & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -k & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & -(k-1) \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ -3 & k & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & 4a & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & 1 \\ k-1 & k & 1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -11 & k \end{bmatrix}$