

Álgebra II

Guía 3: Producto cruz

1. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$(a) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Verifique que, para cada par de vectores del ejercicio 1, el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} ; es decir, compruebe que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$ y $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$.

3. Use el producto cruz para encontrar ecuación general del plano.

$$(a) \text{ El plano que pasa por } P = (2, -1, 0), \text{ paralelo a } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \text{ El plano que pasa por } P = (-1, 2, 4), \text{ paralelo a } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \text{ El plano que pasa por } P = (1, 0, 1), Q = (3, 1, 2) \text{ y } R = (2, -1, 4).$$

$$(d) \text{ El plano que pasa por } P = (0, 2, -1), Q = (1, 3, 0) \text{ y } R = (-2, 1, 2).$$

4. Usando la fórmula

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\theta)$$

$$\text{calcule el ángulo entre los vectores } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

5. Halle la ecuación general del plano que pasa por $P = (2, -1, 0)$ y es paralelo a

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6. Determine la ecuación general del plano que pasa por $P = (0, 1, -1)$, $Q = (2, 0, 2)$

$$\text{y es paralelo a } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. Obtenga la ecuación general del plano perpendicular a la recta $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y que pasa por el punto $P = (0, 2, 1)$.
8. Demuestre las siguientes propiedades del producto cruz. Suponga que $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son vectores de \mathbb{R}^n y $k \in \mathbb{R}$ es un escalar.
- $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
 - $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
 - $\mathbf{u} \times (k\mathbf{v}) = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
 - $\mathbf{u} \times (k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
 - $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$