Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Guía 2: Vectores, rectas y planos
VERSIÓN ACTUALIZADA

Vectores y operaciones

1. Dibuje los siguientes vectores en posición estándar en $\mathbb{R}^2$, es decir, comenzando desde el origen.

   (a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

   (d) $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Considerando los vectores del ítem anterior, calcule los vectores indicados y también muestre cómo pueden obtenerse geométricamente los resultados.

   (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

   (b) $\mathbf{b} + \mathbf{c}$

   (c) $\mathbf{d} + \mathbf{c}$

   (d) $\mathbf{a} - \mathbf{d}$

   (e) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$

   (f) $2\mathbf{c} - 3\mathbf{b} - \mathbf{d}$

3. En la figura, A, B, C, D, E y F son los vértices de un hexágono regular con centro en el origen. Exprese cada uno de los siguientes vectores en términos de $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$:

   (a) $\overrightarrow{AB}$

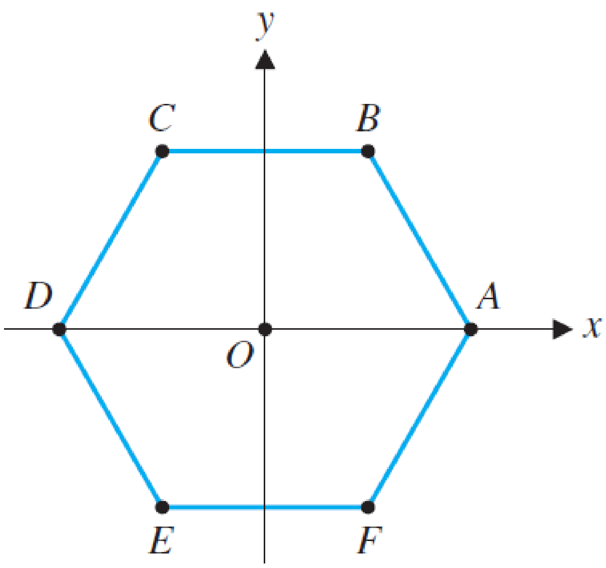
   (b) $\overrightarrow{BC}$

   (c) $\overrightarrow{AD}$

   (d) $\overrightarrow{CF}$

   (e) $\overrightarrow{AC}$

   (f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$



Producto punto y ángulo entre vectores

4. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$ y c es un escalar, explique por qué las siguientes expresiones no tienen sentido:

   (a) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$

   (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$

   (c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

   (d) $c \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

5. Si $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$, calcule $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

6. Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$.

7. En los ejercicios siguientes, determine las cantidades indicadas utilizando los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ y $\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

   (b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$ y $\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}$

   (c) $\dfrac{1}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}}\mathbf{w}$

   (d) $\dfrac{1}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\mathbf{u}$

   (e) $\left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\right)\mathbf{v}$

   (f) $\left(\dfrac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\right)\mathbf{x}$

   (g) $\|\mathbf{w}\|$

   (h) $\|\mathbf{x}\|$

8. Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y la distancia entre los vectores $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

   (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ en la misma dirección que $\mathbf{v}$.

10. Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y en cada caso.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

11. Sea $A = (1, 1, -1), B = (-3, 2, -2)$, y $C = (2, 2, -4)$. Pruebe que $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

12. Encuentre los valores de k de modo que los siguientes pares de vectores sean ortogonales:

    (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-1 \end{bmatrix}$

    (b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$

13. Encuentre el módulo (norma) del vector $\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ sabiendo que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores unitarios en $\mathbb{R}^n$ ortogonales entre sí.

14. Encuentre, de ser posible, todos los vectores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ unitarios que forman un ángulo de $45°$ con $\mathbf{w} = (1, 0, -1)$ y son perpendiculares a $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$.

Rectas y planos

15. Escriba la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de las rectas que pasan por el punto P y tiene vector director $\mathbf{d}$, en cada caso:

    (a) $P = (1, 0), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

    (b) $P = (3, -3), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. Encuentre la forma vectorial de la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa a través de $P = (-1, 0, 3)$ y es paralela a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

17. Determine la ecuación vectorial y paramétricas de la recta que pasa por $P(1, 2, -3)$ y es paralela a la recta $L : \begin{bmatrix} 4-t \\ 3t \\ 1 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

18. Escriba la ecuación del plano que pasa por P con vectores directores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en forma vectorial

    (a) $P = (0, 0, 0), \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $P=(4,-1,3), \mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

19. Escriba la ecuación vectorial y paramétricas del plano que pasa por P con vector normal $\mathbf{n}$:

    (a) $P=(0,1,0), \mathbf{n}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

    (b) $P=(-3,1,2), \mathbf{n}=\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$

20. Encuentre la ecuación vectorial y paramétricas del plano que pasa por los puntos dados.

    (a) $P=(1,1,1), Q=(4,0,2), R=(0,1,-1)$.
    (b) $P=(-1,1,6), Q=(0,1,1), R=(1,0,0)$.
    (c) $P=(1,1,0), Q=(1,0,1), R=(0,1,2)$.

21. Determine las ecuaciones vectorial, paramétrica y general del plano generado por los vectores directores $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}2\\7\\0\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\7\end{bmatrix}$.

22. Encuentre la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(4,-2,1)$ y es perpendicular a la recta

$$L: \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}7\\2\\-3\end{bmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

23. Encuentre la ecuación general del plano que pasa por el punto $Q(1,1,1)$ y es perpendicular a la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x&=2-t,\\ y&=3+2t, \qquad t\in\mathbb{R}.\\ z&=-1+t, \end{aligned}$$

24. Sean $Q=(1,-1,2)$, $P=(1,3,-2)$ y $n=(1,2,2)$. Encuentre el punto de intersección de la recta que pasa por P en la dirección de n y del plano que pasa por Q y es perpendicular a n.

25. Muestre que no hay puntos (x,y,z) que satisfagan la ecuación del plano

$$2x-3y+z-2=0$$

y que estén sobre la recta

$$L: \begin{bmatrix}2\\-2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}$$