uah / Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra II
Pauta de corrección Control 1
Segundo Semestre 2025

1. Si

$$z_1 \;=\; 1 \;-\; i, \quad \overline{z_2} \;=\; -2 \;-\; 4i, \quad z_3 \;=\; \sqrt{3} \;-\; 2i,$$

simplifique al máximo la expresión

$$\left\| \frac{z_1 \;+\; z_2 \;+\; 1}{z_1 \;-\; z_2 \;+\; i} \right\| \;+\; \|\overline{z_3}\| \;+\; \sqrt{7}\, i^{330}$$

Solución:

$$\overline{z_2} \;=\; -2 - 4i \;,\; z_3 \;=\; \sqrt{3} - 2i \Longrightarrow z_2 \;=\; -2 + 4i \;,\; \overline{z_3} \;=\; \sqrt{3} + 2i \;\Longrightarrow\; \|\overline{z_3}\| \;=\; \sqrt{(\sqrt{3})^2 \;+\; 2^2} \;=\; \sqrt{7}$$

Por otro lado,

$$i^{330} \;=\; i^{4\,\cdot\,82\,+\,2} \;=\; i^2 \;=\; -1$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{z_1 \;+\; z_2 \;+1}{z_1 \;-\; z_2 \;+\; i} \right\| \;&=\; \left\| \frac{(1 \;-\; i) \;+\; (-2 \;+\; 4i) \;+\; 1}{(1 \;-\; i) \;-\; (-2 \;+\; 4i) \;+\; i} \right\| \\
&=\; \left\| \frac{1 \;-\; i \;-\; 2 \;+\; 4i \;+\; 1}{1 \;-\; i \;+\; 2 \;-\; 4i \;+\; i} \right\| \\
&=\; \left\| \frac{3i}{3 \;-\; 4i} \right\| \\
&=\; \frac{\|\; 3i \;\|}{\|\; 3 \;-\; 4i \;\|} \\
&=\; \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{3^2 \;+\; (-4)^2}} \\
&=\; \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\left\| \frac{z_1 \;+\; z_2 \;+\; 1}{z_1 \;-\; z_2 \;+\; i} \right\| \;+\; \|\overline{z_3}\| \;+\; \sqrt{7}\, i^{330} \;=\; \frac{3}{5} \;+\; \sqrt{7} \;-\; \sqrt{7} \;=\; \frac{3}{5}$$

2. Determine z^6 donde $z = 5 + 5i$

Solución: Se escribe el número complejo $z \; = \; 5 \; + \; 5i$ en su forma polar.

$$z \; = \; \|z\| \big(\cos(\theta) \; + \; i \operatorname{sen}(\theta) \; \big)$$

Se calcula el módulo de z:

$$\|z\| \; = \; \sqrt{5^2 + 5^2} \; = \; \sqrt{2 \cdot 25} \; = \; 5\sqrt{2}$$

Ahora se obtiene el argumento de z, como el complejo está ubicando en el cuadrante I, entonces

$$\tan(\theta) \; = \; \frac{5}{5} \; = \; 1 \Longrightarrow \theta \; = \; \frac{\pi}{4}$$

Luego, z expresado en forma polar es:

$$z \; = \; 5\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \; + \; i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \; \right)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} z \; &= \; \big(5\sqrt{2}\big)^6 \left(\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \; + \; i \operatorname{sen}\left(6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \; \right) \\ &= \; \big(5\sqrt{2}\big)^6 \left(\cos\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) \; + \; i \operatorname{sen}\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) \; \right) \end{aligned}$$