

Álgebra I

Guía 4: Sumatorias e inducción

1. Determine los primeros cuatro términos a_1, a_2, a_3, a_4 y el término 100 - ésimo a_{100} de cada sucesión.

(a) $a_n = n + 1$

(b) $a_n = 2n + 3$

(c) $a_n = \frac{1}{n+1}$

(d) $a_n = n^2 + 1$

(e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(f) $a_n = \frac{1}{n^2}$

(g) $a_n = 1 + (-1)^n$

(h) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

(i) $a_n = n^n$

(j) $a_n = 3$

2. Encuentre el n - ésimo término a_n de las siguientes sucesiones.

(a) 2, 4, 8, 16, ...

(b) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$

(c) 1, 4, 7, 10, ...

(d) 5, -25, 125, -625, ...

(e) $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \dots$

(f) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

(g) 0, 2, 0, 2, 0, 2, ...

(h) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$

3. Escriba las siguientes sumas utilizando la notación sigma.

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10$

(b) $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{19}{20}$

(d) $\frac{3}{7} + \frac{4}{8} + \frac{5}{9} + \frac{6}{10} + \dots + \frac{23}{27}$

(e) $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

(f) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

(g) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

(h) $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$

(i) $x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$

(j) $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$

4. Expanda las siguientes sumatorias.

(a) $\sum_{i=1}^5 \sqrt{i}$

(b) $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1}$

(c) $\sum_{i=4}^6 3^i$

(d) $\sum_{i=4}^6 i^3$

(e) $\sum_{k=0}^4 \frac{2k-1}{2k+1}$

(f) $\sum_{k=5}^8 x^k$

5. Calcule el valor de cada sumatoria.

(a) $\sum_{i=4}^8 (3i - 2)$

(b) $\sum_{i=3}^6 i(i+2)$

$$(c) \sum_{j=1}^6 3^{j+1}$$

$$(f) \sum_{i=1}^{100} 4$$

$$(d) \sum_{k=0}^8 \cos(k\pi)$$

$$(g) \sum_{i=0}^4 (2^i + i^2)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{20} (-1)^n$$

$$(h) \sum_{i=-2}^4 2^{3-i}$$

6. Calcule el valor de cada sumatoria.

$$(a) \sum_{i=1}^n (i+1)$$

$$(g) \sum_{i=1}^n ((i+1)(i+2))$$

$$(b) \sum_{i=1}^n 2i$$

$$(h) \sum_{j=1}^n (j(j-1)(j+1))$$

$$(c) \sum_{j=4}^n (2-5j)$$

$$(i) \sum_{i=1}^n (i^3 - i - 2)$$

$$(d) \sum_{j=1}^n (4j-1)$$

$$(j) \sum_{i=1}^{n^2} i$$

$$(e) \sum_{i=1}^n (i^2 + 3i + 4)$$

$$(k) \sum_{j=n}^{n+3} j^2$$

$$(f) \sum_{k=2}^n (3+k)^2$$

$$(l) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j$$

7. Calcule el valor de las siguientes sumatorias geométricas.

$$(a) \sum_{i=1}^n \frac{3}{2^{i-1}}$$

$$(c) \sum_{k=3}^n 5^{k-2}$$

$$(b) \sum_{k=1}^6 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{k-2}$$

$$(d) \sum_{i=0}^{n^2-1} (2^{i-3} + 2^i)$$

8. Calcule el valor de las siguientes sumatorias telescópicas.

$$(a) \sum_{i=3}^{99} \frac{1}{i(i+1)} \text{ Ayuda: } \frac{1}{i(i+1)} = \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right).$$

$$(b) \sum_{i=1}^{15} \ln \left(\frac{i+1}{i} \right) \text{ Ayuda: } \ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ para todo } a, b > 0.$$

$$(c) \sum_{i=3}^{100} \ln \left(\frac{i}{i+1} \right)$$

$$(d) \sum_{i=1}^{25} \ln \left(\sqrt{\frac{\cos(2^{i+1})}{\cos(2^i)}} \right) \text{ Ayuda: } \ln(a^c) = c \cdot \ln(a) \text{ para todo } a > 0, c \in \mathbb{R}.$$

$$(e) \sum_{i=1}^{100} (5^i - 5^{i-1})$$

- (f) $\sum_{t=0}^n (\sin(\sqrt{2t}) - \sin(\sqrt{2t+2}))$
- (g) $\sum_{i=1}^n (i^4 - (i-1)^4)$
- (h) $\sum_{k=2}^5 \left(\frac{2^{k-2}}{k-1} - \frac{2^k}{k+1} \right)$ **Ayuda:** sume y reste el término $\frac{2^{k-1}}{k}$ dentro del paréntesis, y luego agrupe convenientemente los términos.

9. Calcule el valor de las siguientes sumatorias.

- (a) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ donde $a_k = (k+1) \cdot 3^{k+1} + k - k \cdot 3^k$, $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\sum_{k=1}^{n+3} a_k$ donde $a_k = (k - 2^{k-1})$, $n \in \mathbb{N}$.
- (c) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ donde $a_k = (-1)^k k$, $n \in \mathbb{N}$.
- (d) $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$ donde $a_k = (k+1)\ln(k+1) - k \ln(k)$ y $b_k = 2^{k+3}$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Demuestre que:

- (a) $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+1}{k+2}\right) = \ln\left(\frac{2(n+1)}{n+2}\right)$ **Ayuda:** $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b > 0$.
- (b) $\sum_{k=1}^n \ln(2^k) = \ln(2) \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

11. Determine el valor de cada límite.

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3 + 5 \left(\frac{2i}{n}\right) \right]$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 1 \right]$
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{3}{n} \left[\left(1 + \frac{3i}{n}\right)^3 - 2 \left(1 + \frac{3i}{n}\right) \right]$

12. Use inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n .

- (a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$
- (b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
- (c) $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n+2) = \frac{n(3n+7)}{2}$
- (d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
- (f) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

- (g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 (h) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$
 (i) $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$

13. Demuestre usando inducción matemática que:

- (a) $4^n - 1$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (b) $5^k - 1$ es divisible por 4, $\forall k \in \mathbb{N}$.
 (c) $2^n + 5$ es divisible por 3, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (d) $3^{2k} - 1$ es divisible por 8, $\forall k \in \mathbb{N}$.
 (e) $2^{3k-1} - 1$ es divisible por 7, $\forall k \in \mathbb{N}$.
 (f) $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible por $x - y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (g) $x^{2n} + y^{2n}$ es divisible por $x + y$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (h) $n(n+1)(n+5)$ es divisible por 6, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 (i) $n(n+1)(n+2)$ es un número par, $\forall n \in \mathbb{N}$.

14. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $a_k = (k - 2^{k-1})$.

- (a) Demuestre utilizando propiedades que $\sum_{k=1}^{n+3} a_k = \frac{(n+3)(n+4)}{2} - (2^{n+3} - 1)$
 (b) Demuestre que la igualdad del item (a) es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ utilizando inducción matemática.

15. Sean $n, k \in \mathbb{N}$ y $a_k = (k+1) \cdot 3^{k+1} + k - k \cdot 3^k$.

- (a) Demuestre utilizando propiedades que $\sum_{k=1}^{2n} a_k = (2n+1) \cdot 3^{2n+1} - 3 + \frac{2n(2n+1)}{2}$
 (b) Demuestre que la igualdad del item (a) es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ utilizando inducción matemática.

16. Sea

$$S = \sum_{k=1}^n k 2^k$$

- (a) Demuestre que el valor de la sumatoria es

$$S = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Ayuda: multiplique por 2 la igualdad que define S y al resultado réstele S .

- (b) Pruebe por inducción que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.