Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra I
PAUTA Solemne 2
Segundo Semestre 2025

Pregunta 1. (6 puntos)

a) (4 pts) Considere los puntos del plano $A(6,-7)$ y $B(2,-2)$. Determine la ecuación de la recta L que pasa por los puntos A y B indicando explícitamente cuál es la pendiente de la recta.

b) (2 pts) Considere la recta $L2$ de ecuación $y = \mathbf{k}x + 1$. Determine el valor de $\mathbf{k}$ para que $L2$ sea

i) perpendicular a L del ítem (a).

ii) paralela a L del ítem (a).

Solución

a) La ecuación de una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es:

$$L : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ con } x_1 \neq x_2$$

Luego, la recta buscada es:

$$L : y - (-7) = \frac{-2 - (-7)}{2 - 6}(x - 6) \Longrightarrow \boxed{L : y + 7 = -\frac{5}{4}(x - 6)}$$

Mientras que la pendiente viene dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{5}{4}}$$

b) En la recta $L2$ de ecuación $y = \mathbf{k}x + 1$, la pendiente, que será denotada como m_2 es:

$$m_2 = \mathbf{k}$$

i) La recta $L2$ es perpendicular a la recta L del ítem *a)* cuando el producto de sus pendientes es igual a -1. Por lo tanto,

$$m \cdot m_2 = 1 \Longleftrightarrow -\frac{5}{4} \cdot \mathbf{k} = -1 \Longleftrightarrow \boxed{\mathbf{k} = \frac{4}{5}}$$

ii) La recta $L2$ es paralela a la recta L del ítem *a)* cuando sus pendientes son iguales. Esto ocurre cuando

$$\mathbf{k} = m = -\frac{5}{4} \Longrightarrow \boxed{\mathbf{k} = -\frac{5}{4}}$$

Pregunta 2. (6 puntos)

Sabiendo que $\operatorname{cosec}(x) = -\dfrac{5}{3}$ con $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, determine el valor de:

a) (2 pts) $\cos(-x + 2\pi)$

b) (2 pts) $\operatorname{sen}(2x + 2\pi)$

c) (2 pts) $\tan(2x)$

Solución

Como $\operatorname{cosec}(x) = -\dfrac{5}{3}$ entonces $\operatorname{sen}(x) = -\dfrac{3}{5}$. Por otro lado,

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)}$$

Pero como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, entonces se tiene que:

$$\cos(x) = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(x)} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x) = -\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos(x) = -\frac{4}{5}}$$

a) De las identidades

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{y} \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

se tiene que:

$$\cos(-x + 2\pi) = \cos(-x) = \cos(x) = -\frac{4}{5} \Longrightarrow \boxed{\cos(-x + 2\pi) = -\frac{4}{5}}$$

b) De las identidades

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

se tiene que:

$$\operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 2 \cdot -\frac{3}{5} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}(2x + 2\pi) = \frac{24}{25}}$$

c) Para obtener el valor de $\tan(2x)$ es necesario conocer los valores de $\operatorname{sen}(2x)$ y $\cos(2x)$.

Para calcular $\cos(2x)$:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \Longrightarrow \boxed{\cos(2x) = \frac{7}{25}}$$

Luego,

$$\tan(2x) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25} \cdot \frac{25}{7} = \frac{24}{7} \Longrightarrow \boxed{\tan(2x) = \frac{24}{7}}$$

Pregunta 3. (6 puntos)

Resuelva las siguienes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi[$.

a) (3 pts) $\operatorname{sen}(2x) = \cos(x)$

b) (3 pts) $3\operatorname{cotg}^2(x) = 1$

Solución

a) Utilizando que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2x) = \cos(x) &\implies 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \cos(x) \\ &\implies 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \cos(x) = 0 \\ &\implies \cos(x)(2\operatorname{sen}(x) - 1) = 0 \\ &\implies \cos(x) = 0 \quad \vee \quad 2\operatorname{sen}(x) - 1 = 0 \\ &\implies \cos(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para la primera ecuación,

$$\cos(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Para la segunda ecuación se buscan ángulos en el 1^{er} y 2^{do} cuadrante ya que en ellos el signo del seno es positivo:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad \vee \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi[$ son:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{5\pi}{6},\ x = \frac{3\pi}{2}}$$

b)

$$3\operatorname{cotg}^2(x) = 1 \Longrightarrow \tan^2(x) = 3 \Longrightarrow \tan(x) = \pm\sqrt{3}$$

Se resuelven

$$\tan(x) = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \tan(x) = -\sqrt{3}$$

Para la primera ecuación se buscan ángulos en el 1^{er} y 3^{er} cuadrante ya que en ellos el signo de la tangente es positivo. Luego,

$$\tan(x) = \sqrt{3} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Para la segunda ecuación se buscan ángulos en el 2^{do} y 4^{to} cuadrante ya que en ellos el signo de la tangente es negativo. Para esto, tener presente que el ángulo de referencia es $\frac{\pi}{3}$.

$$\tan(x) = -\sqrt{3} \Longrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \vee \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi[$ son:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{2\pi}{3},\ x = \frac{4\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}}$$