uah / Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra I
Guía 3: Trigonometría (ACTUALIZADA)

1. Convertir desde grados a radianes.

   a) $210°$ b) $300°$ c) $9°$
   d) $-315°$ e) $900°$ f) $36°$

2. Convertir desde radianes a grados.

   a) 4π b) $-\frac{7}{2}\pi$ c) $\frac{5}{12}\pi$
   d) $\frac{8}{3}\pi$ e) $-\frac{3}{8}\pi$ f) 5

3. Encuentra la longitud de un arco circular subtendido por un ángulo de $\frac{\pi}{12}$ radianes si el radio del círculo es de 36 cm.

4. Si un círculo tiene radio de 10 cm, encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 72°.

5. Un círculo tiene radio de 1.5 m. ¿Qué ángulo se subtiende en el centro del círculo por un arco de 1 m de largo?

6. Encuentra el radio de un sector circular con ángulo $\frac{3\pi}{4}$ radianes y longitud de arco de 6 cm.

7. Dibujar los siguientes ángulos en su posición estándar.

   a) $315°$ b) $-150°$ c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes
   d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes e) 2 radianes f) -3 radianes

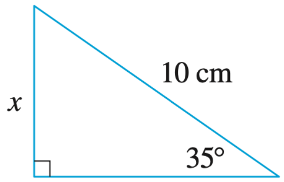
8. Halle las razones trigonométricas exactas del ángulo cuyo valor en radianes se indica.

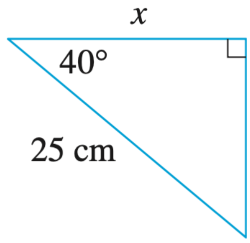
   a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{9\pi}{2}$
   d) -5π e) $\frac{5\pi}{6}$ f) $\frac{11\pi}{4}$

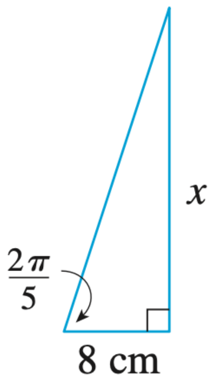
9. Hallar las razones trigonométricas restantes.

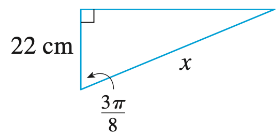
   a) $\sin\theta = \frac{3}{5},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ b) $\tan\alpha = 2,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
   c) $\sec\phi = -1.5,\ \frac{\pi}{2} < \phi < \pi$ d) $\cos x = -\frac{1}{3},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$
   e) $\cot\beta = 3,\ \pi < \beta < 2\pi$ f) $\csc\theta = -\frac{4}{3},\ \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

10. Encuentre, correctas a cinco decimales, las longitudes del lado x.

a) 

b) 

c) 

d) 

11. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

b) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

c) $\sin(\pi - x) = \sin x$

d) $\sin\theta\ \cot\theta = \cos\theta$

e) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

f) $\sec y - \cos y = \tan y\ \sin y$

g) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha\ \sin^2\alpha$

h) $\cot^2\theta + \sec^2\theta = \tan^2\theta + \csc^2\theta$

i) $2\csc 2t = \sec t\ \csc t$

j) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

k) $\dfrac{1}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1}{1 + \sin\theta} = 2\sec^2\theta$

l) $\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

m) $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y)$

n) $\dfrac{\sin\phi}{1 - \cos\phi} = \csc\phi + \cot\phi$

ñ) $\tan x + \tan y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$

o) $\sin 3\theta + \sin\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta$

p) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

12. Demuestre que sen $\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{2}}$.

Sugerencia: Sea $u = \dfrac{x}{2}$ (entonces $x = 2u$). Use la identidad $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2 u$ para despejar $\sin^2 u$ y luego sustituya de vuelta $u = \dfrac{x}{2}$. Aclare el signo según el cuadrante de $\dfrac{x}{2}$.

13. Si $\sin x = \frac{1}{3}$ y $\sec y = \frac{5}{4}$, donde x e y están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, evalúe la expresión.

a) $\sin(x+y)$ b) $\cos(x+y)$ c) $\cos(x-y)$

d) $\sin(x-y)$ e) $\sin 2y$ f) $\cos 2y$

14. Encuentre todos los valores de x en el intervalo $[0, 2\pi[$ que satisfacen la ecuación.

a) $2\cos x - 1 = 0$ b) $3\cot^2 x = 1$

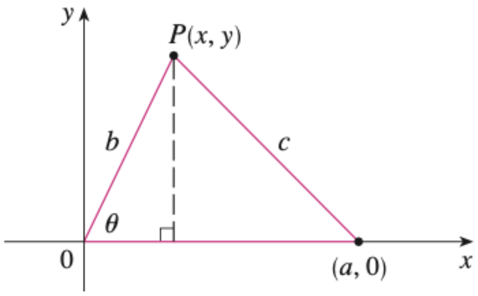
c) $2\sin^2 x = 1$ d) $|\tan x| = 1$

e) $\sin 2x = \cos x$ f) $2\cos x + \sin 2x = 0$

g) $\sin x = \tan x$ h) $2 + \cos 2x = 3\cos x$

15. Demuestre el **Teorema del coseno**: Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b y c, y θ es el ángulo entre los lados de longitudes a y b, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



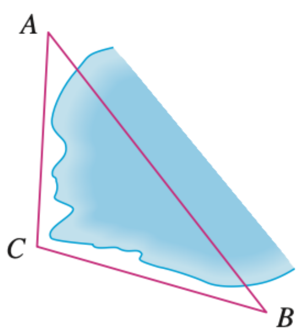
Sugerencia: Introduzca un sistema de coordenadas de modo que θ quede en posición estándar, como en la figura. Exprese x e y en términos de θ y luego use la fórmula de la distancia para calcular c.

¿Qué resultado conocido se obtiene si $\theta = 90°$?

16. Para encontrar la distancia $|AB|$ a través de una bahía pequeña, se ubicó un punto C como se muestra en la figura y se registraron las siguientes medidas:

$$\angle C = 103°, \qquad |AC| = 820\,\text{m}, \qquad |BC| = 910\,\text{m}$$

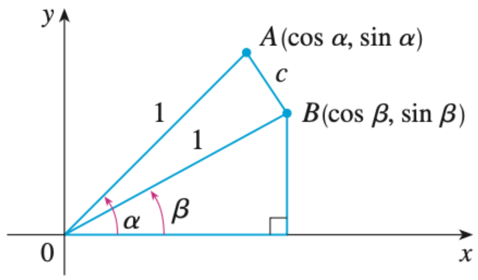
Use el **Teorema del coseno** del Ejercicio 15 para encontrar la distancia requerida.



17. Use la figura para demostrar la identidad para el coseno de la diferencia entre dos ángulos:

$$\cos(\alpha - \beta) \;=\; \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Sugerencia: Calcule c^2 de dos maneras (usando el Teorema del coseno del Ejercicio 15 y también usando la fórmula de la distancia) y compare las dos expresiones.



18. Use el Ejercicio 17 para demostrar que:

$$\cos(x + y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

19. Use la identidad de la adición del coseno y las identidades

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \qquad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

para demostrar que:

$$\sin(x - y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

20. Demuestre que el área de un triángulo con lados de longitudes a y b, y con ángulo comprendido θ, es

$$A = \tfrac{1}{2}ab\sin\theta$$

21. Determine las gráficas de las siguientes funciones a partir de la gráfica de la función seno, coseno y tangente.

a) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

b) $y = \tan 2x$

c) $y = \dfrac{1}{3}\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

d) $y = 1 + \sec x$

e) $y = |\operatorname{sen} x|$

f) $y = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

22. Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

a) $y = \cos(2x)$

b) $y = -\operatorname{sen}(2x)$

c) $y = -3\operatorname{sen}(3x)$

d) $y = \dfrac{1}{2}\cos(4x)$

e) $y = 10\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \pi\right)$

f) $y = 5\cos\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)$

g) $y = -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$

h) $y = 4\,\mathrm{sen}(-2x)$

i) $y = -2\,\mathrm{sen}\,2\pi x$

j) $y = -3\,\mathrm{sen}\,\pi x$

k) $y = 1 + \frac{1}{2}\cos(x + \pi)$

l) $y = -2 + \cos(x - 2\pi)$

23. Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completeo.

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $y = 2\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = -2\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

d) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $y = -4\,\mathrm{sen}\,2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

f) $y = \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 5\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

h) $y = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

i) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

j) $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

k) $y = 3\cos\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$

l) $y = 3 + 2\,\mathrm{sen}\,3(x + 1)$

m) $y = \mathrm{sen}(\pi + 3x)$

n) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

24. Encuentre el valor exacto de cada expresión.

a) $\mathrm{sen}^{-1}(1)$, $\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{sen}^{-1}(2)$

b) $\mathrm{sen}^{-1}(-1)$, $\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{sen}^{-1}(-2)$

c) $\cos^{-1}(-1)$, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cos^{-1}(1)$, $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\tan^{-1}(-1)$, $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$, $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

f) $\tan^{-1}(0)$, $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$, $\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

g) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\tan^{-1}(1)$

h) $\cos^{-1}(0)$, $\mathrm{sen}^{-1}(0)$, $\mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

25. Determine si las siguientes expresiones están definidas. En caso de serlo, calcule su valor exacto.

a) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

b) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

c) $\tan(\tan^{-1}(5))$

d) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(5))$

e) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

f) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

g) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

h) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

i) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

j) $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

k) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

l) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

m) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$

n) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

ñ) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

o) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$

p) $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

q) $\cos(\operatorname{sen}^{-1}(0))$

r) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

s) $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

t) $\operatorname{sen}(\tan^{-1}(-1))$

u) $\operatorname{sen}\big(\tan^{-1}(-\sqrt{3})\big)$