

## Pre-Solemne Álgebra I

1. En el plano se ubican los puntos

$$A(1, 2) \quad \text{y} \quad B(7, 2).$$

Desde el punto  $A$  se traza un segmento  $AC$  que tiene longitud 8 y que forma un ángulo de  $60^\circ$  con el segmento  $AB$  (en sentido antihorario).

- (a) Determine las coordenadas exactas del punto  $C$ .
- (b) Halle la ecuación de la recta que pasa por  $A$  y  $C$ .
- (c) Halle la ecuación de la recta perpendicular a  $AC$  que pasa por el punto medio de  $AC$ .
- (d) Calcule el área del triángulo  $ABC$ .

2. Considere las rectas

$$L_1 : 2x - y - 4 = 0, \quad L_2 : x + (k - 1)y - k = 0.$$

- (a) Determine el valor de  $k$  para que  $L_1$  y  $L_2$  sean perpendiculares.
- (b) Para el valor de  $k$  obtenido en (a):
  - i. Encuentre el punto de intersección  $P_{12}$  de  $L_1$  y  $L_2$ .
  - ii. Halle la ecuación de la recta  $L_3$  que pasa por  $P_{12}$  y es paralela a  $y = x$ .

3. Dos antenas se ubican en

$$A(0, 0), \quad B(10, 0).$$

Un receptor se encuentra en un punto  $P \neq A$  de la recta que forma  $45^\circ$  con  $AB$  en  $A$ . Además,  $PB = 10$  (unidades).

- (a) Determine las coordenadas exactas de  $P$ .
- (b) Halle la ecuación de la recta perpendicular a  $AB$  que pasa por  $P$ .
- (c) Determine el ángulo que forma esta recta con el eje  $x$ .

4. (a) Demuestre que

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \sec^2 x.$$

- (b) Use esta identidad para resolver, en  $[0, 2\pi[$ ,

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 4.$$

5. Considere la recta  $L : y = -x + 10$ . Determine todos los puntos de  $L$  que están a distancia 10 del origen  $O(0, 0)$ . Luego, para cada punto hallado, escriba la ecuación de la recta *perpendicular* a  $L$  que pasa por ese punto.

6. Demuestre que

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x},$$

y utilice esta identidad para resolver la ecuación

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$$

en el intervalo  $[0, 2\pi[$ .

7. Una empresa de telecomunicaciones desea instalar un nuevo mástil en la cima de un cerro. Desde dos puntos de observación  $A$  y  $B$ , ubicados en el mismo plano horizontal, se miden los ángulos de elevación hacia la cima  $T$  de la torre:

- La distancia horizontal entre  $A$  y  $B$  es 150 m.
  - El ángulo de elevación desde  $A$  hacia  $T$  es  $30^\circ$ .
  - El ángulo de elevación desde  $B$  hacia  $T$  es  $60^\circ$ .
  - El punto  $B$  se encuentra al este del punto  $T$ , mientras que el punto  $A$  se encuentra al oeste
  - El terreno es plano.
- (a) Sea  $x$  la distancia horizontal desde  $A$  a la proyección de  $T$ . Exprese  $x$  y la altura  $h$  con razones trigonométricas.
- (b) Determine la **altura exacta**  $h$  de la cima.
- (c) Halle el **ángulo en la cima**  $\angle ATB$  del triángulo  $ABT$ .