

Guía 1: Lógica y conjuntos

1. Si p es una proposición **verdadera** y q es **falsa**, determine el valor de verdad de:

$$\sim [(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim q] \implies [(\sim q \vee r) \implies (q \implies s)]$$

2. Sean p, q y r proposiciones, tales que p es **verdadera**, q es **falsa** y r es una **proposición cualquiera**. Determine el valor de verdad de

a) $(p \wedge q) \vee q$

b) $(p \vee r) \wedge q$

c) $(\sim q \vee r) \implies \sim (p \vee \sim r)$

3. Si $(\sim p \wedge q)$ es verdadera, demuestre que

$$[(p \vee q) \iff (p \wedge \sim q) \vee p]$$

también lo es.

4. Se definen los conectivos lógicos ∇ y $\triangle$ por:

$$p \nabla q \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$

$$p \triangle q \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

Demuestre que:

a) $\sim p \equiv (p \nabla p)$

b) $(p \wedge q) \equiv \sim (p \triangle q)$

5. Demuestre a través de tablas de verdad la siguiente equivalencia:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

6. Utilizando leyes de álgebra proposicional demuestre las siguientes equivalencias:

a) $[\sim p \implies \sim (p \implies q)] \vee [(p \wedge (p \implies q)) \implies p] \equiv V$

b) $\sim [(p \implies q) \wedge (\sim p \implies q)] \equiv \sim q$

7. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \left\{4, -2, \frac{1}{2}\right\}$. Determine el valor de verdad de:

a) $(\exists x \in A)(x^2 \geq x)$

c) $(\forall x \in B)(x^2 \geq x)$

b) $(\exists x \in B)(x^2 \geq x)$

d) $(\forall x \in A)(x^2 \geq x)$

8. Niegue las siguientes proposiciones:

- a) $[(\forall x \in U : p(x)) \vee (\forall x \in U : \sim q(x))]$
- b) $[(\exists x \in U : \sim p(x)) \wedge (\forall x \in U : q(x))]$
- c) $\left[(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x - y > 4) \wedge \left(2x - \frac{y}{3} \geq 5\right)] \right]$
- d) $[(\forall x \in A)(\forall y \in B)[(x + y = 1) \implies (5x - 4y > 3)]$

9. Niegue la siguiente proposición lógica que depende de ϵ (epsilon) y δ (delta).

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x - x_0| < \delta \implies |y - y_0| < \epsilon)$$

10. Determine si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^3 = 1)$
- b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 0)$
- c) $(\exists! x \in \mathbb{R})(x - 1 = 0)$

11. Si $U = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$. Encuentre $A \cap B$, $A \cup B$, $(A \cap B)^c$ y $(A \cup B)^c$

12. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}$. Determine si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta. Recuerde que $|x| < a, a > 0 \iff -a < x < a$.

- a) $0 \in A$
- b) $1 \in A$
- c) $2 \notin A$
- d) $-5 \notin A$
- e) $\frac{1}{2} \in A$
- f) $\pi \in A$
- g) $\sqrt{2} \notin A$
- h) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \notin A$
- i) $-\frac{1}{2} \in A$

13. Si $U = \mathbb{R}$, $I =]-\infty, -8] \cup]-7, \infty[$ y $J =]-\infty, 3[$ Encuentre $I \cap J$, $(I \cap J)^c$, $I \setminus J$, $J \setminus I$ y $J \triangle I$.

14. Si $U = \mathbb{R}$, $M = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ y $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$. Encuentre el conjunto de elementos que pertenecen tanto a M como a N .

15. Si $U = \mathbb{R}$, determine $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B)^c$, $(A \cap B)^c$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, $B \triangle A$ y $(B \triangle A)^c$ en cada caso.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 9x^2 + 14x = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 25 = 0\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

16. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6\}$. Hallar:

- | | | |
|---------------|----------------------|--------------------|
| a) $A \cap B$ | c) $A \cup B \cup C$ | e) $A \setminus B$ |
| b) $A \cup B$ | d) $A \cap B \cap C$ | f) $B \Delta C$ |

17. Sea $U = \mathbb{R}$, defina $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$.

- | | | |
|---------------|----------|-----------------------------|
| a) $A \cap B$ | c) A^c | e) $(A \cap B)^c$ |
| b) $B \cup C$ | d) C^c | f) $(A \cup B) \setminus B$ |

18. Sean $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6\}$ y $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 9\}$. Verificar que:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$ | b) $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$ |
|----------------------------------|----------------------------------|

19. Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Si $A = \{1, 2, 3, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Encuentre:

- | | | |
|---------------|--------------------|------------------------|
| a) $A \cup B$ | e) $A \setminus B$ | i) $(A \cap B)^c$ |
| b) $A \cap C$ | f) $C \setminus B$ | j) $C^c \cap A$ |
| c) $A \cup C$ | g) $A \Delta B$ | k) $(A \setminus B)^c$ |
| d) $B \cap C$ | h) A^c | l) $(B \cup C)^c$ |

20. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 6\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 7\}$. Encuentre:

- | | | |
|------------------------|------------------------|---------------------------------|
| a) $(A \cap B) \cup C$ | c) $A \cap (B \cup C)$ | e) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ |
| b) $(A \cup C) \cap B$ | d) $(A \cup B) \cap C$ | f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ |

21. En una encuesta en la Región Metropolitana se consulta a 1.000 personas y se obtiene que: 990 hablan castellano, 626 hablan inglés, 134 hablan francés, 620 hablan castellano e inglés, 130 hablan castellano y francés y 100 hablan los tres idiomas.

- Haga un diagrama de Venn - Euler que refleje la situación.
- ¿Cuántas personas hablan sólo castellano? ¿cuántas sólo inglés? y ¿cuántas solo francés?
- ¿Cuántas hablan inglés y no hablan francés?
- ¿Cuántas hablan inglés o frances?

22. Escribir el siguiente conjunto por extensión: $I = \{n(n+1) - 1 \mid n \in \mathbb{N}, n < 6\}$.

23. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 5\}$ y $C =]1, 7]$. Encuentre el conjunto $(A \cap B) \setminus C$.