

Álgebra I

Felipe Fresno

Universidad Alberto Hurtado

LENGUAJES SIMBÓLICOS

¿qué es la lógica?

La lógica es un componente del conocimiento en el que se estudian los métodos de razonamiento con el objetivo de determinar si un argumento dado es válido o no. La lógica constituye el primer paso para el estudio formal de la matemática moderna: cursos de álgebra, álgebra lineal, cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo en varias variables, ecuaciones diferenciales, probabilidades y estadística, métodos estocásticos, etc.

Los elementos que se estudian en lógica son fundamentales para que logres entender a cabalidad el significado de definiciones, propiedades, lemas, teoremas y corolarios que aparecerán a lo largo de toda tu vida como estudiante universitario. Es por esto que el lograr entender este contenido del curso, te hará más fácil el aprendizaje de cursos matemáticos que enfrentarás desde hoy hasta el cuarto o quinto semestre de tu carrera.

Motivación por estudia lógica

Supongamos que olvidé el cumpleaños de mi señora.

¿ será que **si le regalo** flores y chocolates **entonces** ella me perdonará ?

Observa que la pregunta anterior tiene la forma o estructura siguiente:

si “ hago algo ” (como regalar flores y chocolates) **entonces** me perdonará.

Una de las aplicaciones de la lógica es justamente determinar cuando y cuando no, el realizar una acción o hacer algo, tendrá como consecuencia otra cosa.

Definición

Una **proposición lógica** es un enunciado del que se puede afirmar que es **verdadero** o **falso**, pero no ambos a la vez.

Son proposiciones lógicas las siguientes:

1 $2 + 5 = 7$

2 Jumbo es un supermercado.

3 10 es un número primo.

4 Estamos en Colombia.

5 Los ángulos internos de un triángulo plano suman 180° .

No son proposiciones lógicas las siguientes:

1 ¿habla Ud. alemán?

2 ¿me regalas un chocolate?.

3 Tómame 2 aspirinas.

4 ¡no sigas mirando el celular!.

Notación para referirse a una proposición

Es costumbre en matemática utilizar las letras minúsculas p , q y r para denotar o hacer referencia a una proposición. Si la proposición p es verdadera se dice que su **valor de verdad** es V mientras que si es p falsa se dice que su **valor de verdad** es F .

Ejemplos:

- 1 La proposición lógica p : “algunos números son positivos” tiene valor de verdad V .
- 2 La proposición q : “los ingenieros no estudian matemática” tiene valor de verdad F .
- 3 La proposición lógica r : “Galileo Galilei hizo contribuciones a la Física y a la Astronomía” tiene valor de verdad V .

En el lenguaje usual, es habitual encontrar expresiones como las siguientes:

- 1 Los ingenieros estudian matemática **y** física.
- 2 Puedes llegar al cine por metro **o** uber.
- 3 Si llegas temprano **entonces** el estacionamiento estará vacío.
- 4 Si x es un número negativo **entonces** $\log(x)$ no existe.
- 5 Si la materia es muy complicada **entonces** voy a estudiar el triple que antes.

Notar que estos enunciados están constituidos por **dos proposiciones** unidas por “y”, “o”, o condicionadas “si $\dots$, entonces $\dots$ ”.

En lógica, el “y”, “o”, “ entonces ” y otros, se pueden reemplazar por símbolos lógicos que forman parte de los **conectivos lógicos**. Estos se utilizan para conectar dos proposiciones dadas dando origen a **proposiciones compuestas**.

Conectivos lógicos y tablas de verdad

Definición(*Conectivos*)

Los conectivos son símbolos que conectan dos proposiciones dando origen a proposiciones compuestas. Los conectivos que usaremos en este curso son los siguientes:

$$\wedge, \vee, \underline{\vee}, \implies, \iff$$

Estas se describen la siguiente tabla

nombre	símbolo	prop compuesta	como se lee	descripción
conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q	es V sólo si ambas lo son
disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q	es V si al menos una es V
implicancia	$\implies$	$p \implies q$	si p entonces q	es F sólo si p es V y q F
doble implica	$\iff$	$p \iff q$	p si y solo si q	es V si ambas son F o V
disyu. exclusiva	$\underline{\vee}$	$p \underline{\vee} q$	o p o q no ambas	es V si tan sola una es V.

Antes de estudiar en profundidad los conectivos de la tabla anterior, debemos definir qué es la **negación** de una proposición lógica.

Definición(*Negación*)

La negación de una proposición lógica es una nueva proposición que tiene un valor de verdad opuesto al de la proposición original, es decir, si p es verdadera, la negación de p es falsa. Se denota como $\sim p$, $\neg p$ o bien $\bar{p}$ y se lee **no p**.

Ejemplos:

- 1 Si p : Estamos en clases online, entonces $\sim p$: No estamos en clases online.
- 2 Si q : Algunos números son positivos, entonces $\sim q$: Todos los números son negativos
- 3 Si r : El cielo es azul, y el pasto es verde. $\sim r$: El cielo no es azul, y el pasto no es verde. .

Propiedades de la negación

- 1 $\sim p$ sigue siendo una proposición lógica.
- 2 $\sim (\sim p)$ es p
- 3 $\sim V$ es F y $\sim F$ es V .

Ya sabemos entonces que si p es verdadera entonces $\sim p$ es falsa y viceversa. Esta información es posible ordenarla en la siguiente tabla:

p	$\sim p$
V	F
F	V

La tabla anterior se conoce como tabla de verdad y se define a continuación:

Definición(*tabla de verdad*)

La tabla de verdad es un método de calcular el valor de verdad de una proposición lógica considerando todas las posibilidades de valores de las proposiciones que la componen.

Estudiemos ahora el resto de los conectivos lógicos y sus tablas de verdad correspondientes.

- 1 Conjunción ($p \wedge q$) :** La **conjunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la conjunción ($\wedge$). Esta proposición se denota como $p \wedge q$ y se lee “ p y q ”.

Ejemplo: Si p : Las palomas vuelan y q : Los canarios comen dinosaurios, entonces podemos afirmar que $p \wedge q$ significa: Las palomas vuelan y los canarios comen dinosaurios.

La conjunción $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando ambas proposiciones p y q lo son. En cualquier otro caso la conjunción es falsa.

Utilizando esta información, podemos construir su tabla de verdad.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejercicio: Si se sabe que p : “ estoy loco de amor ” es verdadero y que q : “ mi tarea se la comió el perro ” es falso. Determina el valor de verdad de $p \wedge q$: “estoy loco de amor y mi tarea se la comió el perro”

Ejercicios

Determine la tabla de verdad de la siguiente proposición: $p \wedge \sim q$

Solución: Dado que la proposición compuesta está conformada por 2 proposiciones simples, entonces la cantidad de filas de la tabla será igual a $2^2 = 4$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	F	F

Ejercicio

Determine la tabla de verdad de la proposición $\sim p \wedge \sim q$.

Solución:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Una tabla de verdad con $2^3 = 8$ filas

Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición compuesta : $(a \wedge b) \wedge c$

a	b	c	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge c$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

2 Disyunción ($p \vee q$): La **disyunción** es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyunción ($\vee$). Esta proposición se representa por $p \vee q$ y se lee “ p o q ”

Ejemplo: Si p : El número π es mayor que 3 y q : El número π es igual que 3, entonces podemos afirmar que $p \vee q$: El número π es mayor o igual a 3.

La característica fundamental de la disyunción es que es verdadera cuando por lo menos una de las proposiciones p y q lo es. En cualquier otro caso la disyunción es falsa. Su tabla de verdad es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejercicio: Si p : El libro es interesante, es verdadera mientras que q : En la noche el sol brilla es falsa, determine el valor de verdad de $p \vee q$.

3 Disyunción exclusiva ($\underline{\vee}$): La disyunción exclusiva es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la disyunción exclusiva $\underline{\vee}$. Esta proposición se denota $p \underline{\vee} q$ y se lee “o p o q ”

Ejemplo: Si p : El vaso está sucio y q : La leche está adulterada, entonces la proposición “O el vaso está sucio o la leche está adulterada” , se expresa $p \underline{\vee} q$.

La característica fundamental de la disyunción exclusiva es que es verdadera sólo cuando las proposiciones que la componen tienen valores de verdad opuestos. En cualquier otro caso, la disyunción exclusiva es falsa.

De lo anterior, es sencillo construir la tabla de verdad de la disyunción exclusiva:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejercicio: Si p : El coronavirus llegó a Chile, es verdadera y q : Antonio va a ir al cine, es verdadera, determine el valor de verdad de la proposición “O el coronavirus llegó a Chile o Antonio va a ir al cine”.

- 4 Implicancia:** La implicancia es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la implicancia $\implies$. Esta proposición se denota por $p \implies q$ y se lee “ si p entonces q ” o bien “ p implica q ”

Ejemplo: Si p : “la UTFSM se fundó el 20 de diciembre de 1931” , y q : $2 + 3 = 10$, la proposición “si la UTFSM se fundó el 20 de diciembre de 1931 entonces $2 + 3 = 10$ ” , se expresa $p \implies q$.

En las estructuras $p \implies q$, p se llama **antecedente** y q se llama **consecuente**. La característica fundamental de la implicancia es que **es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso**. En todos los demás casos la implicancia es verdadera.

¿ cuál es el valor de verdad tiene la implicancia $p \implies q$ del ejemplo?

Según lo anterior, la tabla de verdad de la implicancia es la siguiente:

p	q	$p \implies q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejercicio: Si p : Si mi abogado es un tiburón es verdadera y q : $3^2 = 8$ es falso. Determine el valor de verdad de $p \implies q$ ¿cuál será el valor de verdad de $q \implies p$?

- 5 Equivalencia:** La equivalencia es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones p y q mediante la equivalencia $\iff$. La proposición resultante se representa como $p \iff q$ y se lee “ p si y sólo si q ” o bien “ p es equivalente con q ”.

Ejemplo: Si p : Estudio en la Universidad y q : Se hundió el Titanic, entonces “ Estudio en la universidad si y sólo si se hundió el Titanic”, se expresa como $p \iff q$.

La característica fundamental de la equivalencia es que será verdadera sólo cuando p y q tienen mismo valor de verdad (ambos V o ambos F). En cualquier otro caso la equivalencia será falsa.

Considerando que la equivalencia es verdadera sólo cuando p y q tienen mismo valor de verdad, entonces con esa información es posible construir su tabla de verdad.

p	q	$p \iff q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejercicio: Si p : Colombia es conocido por el café, es verdadera y q : En Chile el transporte público es gratis, es falso, determine el valor de verdad de $p \iff q$.

Ejemplo

Si p es una proposición verdadera, q es falsa y r es falsa, determine el valor de verdad de la proposición compuesta

$$[p \implies (\sim q \wedge r)] \implies (p \vee \sim r).$$

- p es V
- Como q es F entonces $\sim q$ es V
- Además por hipótesis se tiene que r es F .
- $(\sim q \wedge r) \equiv V \wedge F \equiv F$
- $p \vee \sim r \equiv V \vee V \equiv V$

Por lo tanto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [V \implies (V \wedge F)] \implies (V \vee V) &\equiv [V \implies F] \implies V \\ &\equiv F \implies V \\ &\equiv V \end{aligned}$$

Ejemplo

Sabiendo que $\sim p \implies (q \wedge r)$ es **falsa** y que $(\sim p \wedge q)$ es **verdadera**, determine el valor de verdad de la proposición compuesta $(p \wedge r) \iff (r \vee \sim q)$.

- Como $\sim p \implies (q \wedge r)$ es falsa, entonces $\sim p \equiv V$ y $(q \wedge r) \equiv F$. De aquí se deduce que $p \equiv F$.
- Como $(\sim p \wedge q)$ es verdadera, entonces $\sim p \equiv V$ (que ya sabía) y $q \equiv V$.
- Por otro lado, como $(q \wedge r) \equiv F$ y $q \equiv V$ se tiene que $(V \wedge r) \equiv F$. De esto último se deduce que r debe ser falsa.
- Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}(p \wedge r) \iff (r \vee \sim q) &\equiv (F \wedge F) \iff (F \vee \sim V) \\ &\equiv (F \wedge F) \iff (F \vee F) \\ &\equiv F \iff F \\ &\equiv V\end{aligned}$$

En resumen se tienen las siguientes tablas de verdad:

Disyunción ($\vee$)

p	q	$p \vee q$
v	v	v
v	f	v
f	v	v
f	f	f

Conjunción ($\wedge$)

p	q	$p \wedge q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	f

Implicación ($\rightarrow$)

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Equivalencia ($\leftrightarrow$)

p	q	$p \leftrightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	f
f	f	v

Tautologías, contradicciones y contingencias

- 1** Una proposición compuesta que es **siempre verdadera**, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la forman se llama **TAUTOLOGÍA**.

Ejemplo: $((p \implies q) \wedge p) \implies q$ es una tautología famosa llamada *Modus ponens*.

Un ejemplo concreto de esta tautología es el siguiente:

Sean p = está lloviendo y q = te espero dentro del cine.

Luego:

Si está lloviendo, te espero dentro del cine.

Está lloviendo

Entonces, te espero dentro del cine.

La tabla de verdad del *Modus ponens* es

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Ejercicio: Demuestra que $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$ es una tautología. (Esta tautología se conoce como *Modus tollens*)

- 2 Una proposición compuesta que es **siempre falsa**, sin importar los valores de verdad de las proposiciones que la componen se llama **CONTRADICCIÓN o ABSURDO**.

Ejemplos:

- a) $p \wedge \neg p$ es un absurdo. Es imposible que algo sea y no sea al mismo tiempo: decir que es de día y que al mismo tiempo no es de día es una contradicción.
- b) $(p \implies q) \wedge (p \wedge \neg q)$ es un absurdo.

p	q	$p \implies q$	$p \wedge \neg q$	$(p \implies q) \wedge (p \wedge \neg q)$
F	F	V	F	F
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
V	V	V	F	F

- 3 Una proposición compuesta que no es tautología ni contradicción se llama **CONTINGENCIA**.

Ejemplo: $q \vee (r \wedge s)$ es una contingencia.

q	r	s	$r \wedge s$	$q \vee (r \wedge s)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Álgebra proposicional

De la gran cantidad de tautologías existentes, algunas de ellas se distinguen por la importancia e incidencia que tienen en temas posteriores; entre ellas están las **leyes del álgebra proposicional**. Antes de continuar, se debe tener presente la siguiente definición:

Definición

Dos proposiciones compuestas p y q se dicen **lógicamente equivalentes** si $p \iff q$ es una tautología, en tal caso se escribe que $p \equiv q$.

A continuación se presenta una larga lista de tautologías que se sugiere leerlas hasta reconocerlas como válidas (es posible probarlas que tablas de verdad). Estas nos permitirán simplificar y demostrar nuevas tautologías entre dos proposiciones compuestas.

Leyes de álgebra proposicional

1 Doble negación: $\neg(\neg p) \iff p$

2 $(p \Rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$

3 $(p \iff q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

4 $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

5 Leyes idempotentes

$$(p \wedge p) \equiv p, (p \vee p) \equiv p$$

6 Leyes conmutativas

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p); (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$

7 Leyes asociativas

$$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$$

$$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$$

8 Leyes distributivas

$$[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

9 Leyes de Morgan

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

10 Leyes del contrapositivo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

11 $(p \iff q) \equiv \neg p \iff \neg q.$

12 $p \Rightarrow (p \vee q); (p \wedge q) \Rightarrow p$

13 Leyes de absorción

$$[p \wedge (p \vee q)] \equiv p, [p \vee (p \wedge q)] \equiv p$$

14 Transitividad

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv (p \Rightarrow r)$$

$$[(p \iff q) \wedge (q \iff r)] \equiv$$

$$(p \iff r)$$

15 $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

16 $[(p \vee q) \Rightarrow r] \equiv [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

Leyes de identidad

Si denotamos T (o bien $V \equiv$ verdadero) a una tautología , por C (o bien $F \equiv$ falso) a una contradicción y “ p ” a una proposición lógica, entonces se cumplen las siguientes **leyes de identidad**.

$$\mathbf{1} \quad (p \wedge T) \equiv p$$

$$\mathbf{3} \quad (p \vee T) \equiv T$$

$$\mathbf{2} \quad (p \wedge C) \equiv C$$

$$\mathbf{4} \quad (p \vee C) \equiv p$$

Ejercicios

Utilizando teoremas de álgebra proposicional , demuestre las siguientes equivalencias.

$$\mathbf{1} \quad (p \vee q) \implies (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

$$\mathbf{2} \quad p \wedge (q \implies p) \equiv p$$

$$\mathbf{3} \quad p \wedge \{ \sim p \implies [(\sim p \vee q) \implies \sim q] \} \equiv p$$

$$\mathbf{4} \quad \sim [(p \implies q) \wedge (\sim p \implies q)] \equiv \sim q$$

$$\mathbf{5} \quad [(p \iff \sim q) \wedge (q \wedge \sim p)] \equiv \sim p \wedge q$$

Cuantificadores

Considere el enunciado $p(x) : x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 2$. Notar que p no es una proposición lógica ya que no se le puede dar un valor de verdad a priori. El valor de verdad de p dependerá de los valores que se le asignen a la variable x . Este es un **enunciado abierto o función proposicional**, el que se transforma en una proposición lógica sólo cuando las variables son sustituidas por objetos particulares.

Ejemplo: • $p(1)$ es una proposición lógica ya que se le puede asignar un valor de verdad, a saber F

• $p(5)$ es una proposición lógica ya que se le puede asignar un valor de verdad, a saber V

Función proposicional

Definición

Una función proposicional (enunciado abierto) o predicado, se denota $p(x)$ y corresponde a un enunciado que tiene la posibilidad de convertirse en una proposición lógica al sustituir la variable x por una constante específica, donde x pertenece al conjunto universal U , que varía de significado según el caso.

Ejemplos:

- 1 Sea $U = \mathbb{R}$ y $p(x) : x + 2 = 5$. p es una función proposicional ya que $p(3)$ es V , $p(4)$ es F , etc. Los diferentes valores de x pertenecen al conjunto universal $U = \mathbb{R}$.
- 2 $U = \mathbb{R}$ y $q(x) : x^2 - 1 = 0$. Entonces q es una función proposicional.
- 3 Sea $U = \text{"conjunto de triángulos en el plano"}$. Sea $x \in U$. Entonces x es equilátero es una función proposicional. Dado que será verdadera o falsa dependiendo de los triángulos que se consideren en el conjunto U .

Las negaciones de las fórmulas proposicionales básicas pueden expresarse bajo las siguientes formas:

	Fórmula	Negación
Conjunción	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
Disyunción	$p \vee q$	$\sim p \wedge \sim q$
Equivalencia	$p \iff q$	$p \wedge \sim q \text{ o } q \wedge \sim p$
Implicancia	$p \implies q$	$p \wedge \sim q$

Cuantificador universal

Dada una función proposicional o predicado $p(x)$, se escribe

$$\forall x \in A, p(x)$$

cuando exactamente todos los elementos del conjunto A satisfacen la proposición p . El símbolo $\forall$ se llama **cuantificador universal** y se lee “**para todo**”.

Ejemplos:

- 1 La proposición $p(x) : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ es verdadera.
- 2 La proposición $q(x) : \forall x \in \mathbb{N}, x - 7 \geq x$ es falsa.
- 3 Todo alumno de la asignatura es estudioso puede escribirse simbólicamente como sigue: $\forall x \in A, p(x)$ donde $A = \text{curso}$, $x = \text{estudiante}$ y $p(x)$: x es estudioso.

Cuantificador existencial

Dada una función proposicional o predicado $p(x)$, se escribe

$$\exists x \in A, p(x)$$

cuando solamente algunos elementos x del conjunto A satisfacen la proposición p . El símbolo $\exists$ se llama **cuantificador existencial** y se lee “**existe algún**”.

Ejemplos:

- 1 La proposición $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5$ es verdadera.
- 2 La proposición $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 5$ es falsa.
- 3 Existe en este curso algún alumno estudioso puede escribirse simbólicamente como sigue: $\exists x \in A, p(x)$, donde $A = \text{curso}$, $x = \text{estudiante}$ y $p(x)$: x es estudioso.

Cuantificador existe un único

Dada una función proposicional o predicado $p(x)$, se escribe

$$\exists! x \in A, p(x)$$

cuando exactamente un solo elemento x del conjunto A satisface la proposición p . El símbolo $\exists!$ se llama **cuantificador existe un único**.

Ejemplos:

- 1 Existe un único número natural cuyo cuadrado es 9 admite la siguiente representación simbólica: $\exists! x \in \mathbb{N}, x^2 = 9$.
- 2 Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$. La proposición $\exists! x \in A, x$ es par tiene valor de verdad V .

Considere el conjunto universo U y los subconjuntos $A, B \subseteq U$. Si $q(x, y)$ es una función proposicional con dos variables, entonces:

- 1 Existe un $x \in A$ y existe un $y \in B$ tal que se cumple $q(x, y)$ se escribe simbólicamente como $(\exists x \in A)(\exists y \in B) : q(x, y)$.
- 2 Existe un $x \in A$ tal que para todo $y \in B$ se cumple $q(x, y)$ se escribe simbólicamente como $(\exists x \in A)(\forall y \in B) : q(x, y)$.
- 3 Para cada $x \in A$, existe al menos un $y \in B$ tal que se cumple $q(x, y)$ se escribe simbólicamente como $(\forall x \in A)(\exists y \in B) : q(x, y)$.
- 4 Para todo $x \in A$ y para todo $y \in B$ se cumple $q(x, y)$ se escribe simbólicamente como $(\forall x \in A)(\forall y \in B) : q(x, y)$.

Como negar una proposición con cuantificador

1 Si la proposición es $\forall x \in A, p(x)$, su negación será
$$\sim (\forall x \in A, p(x)) = \exists x \in A, \sim p(x).$$

2 Si la proposición es $\exists x \in A, p(x)$, su negación será
$$\sim (\exists x \in A, p(x)) = \forall x \in A, \sim p(x)$$

3 Si la proposición es $\exists! x \in A, p(x)$, su negación será
$$\sim (\exists! x \in A, p(x)) = \{(\forall x \in A : \sim p(x)) \vee (\exists x, y \in A, x \neq y : p(x) \wedge p(y))\}$$

Ejemplos

- 1** Si $(\forall x \in A)(x \text{ es par})$ entonces $\sim [(\forall x \in A)(x \text{ es par})]$ se lee: existe un elemento x en A tal que x es impar. Lo que simbólicamente se expresa como $(\exists x \in A)(x \text{ es impar})$.
- 2** Considere la proposición $p : \exists x \in A : x + 1 = 3$. Su negación sería $\sim p : \forall x \in A : x + 1 \neq 3$.
- 3** Negar : $(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \implies x^2 > 0)$. La negación sería $\sim [(\forall x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \implies x^2 > 0)]$.

Lo que es equivalente a :

$$(\exists x \in \mathbb{R}) \sim (x \neq 0 \implies x^2 > 0)$$

Recordar la negación de la implicancia: si p y q son dos proposiciones lógicas, entonces $\sim (p \implies q) \equiv p \wedge \sim q$. Por lo que finalmente se obtiene que la negación buscada es:

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x \neq 0 \wedge x^2 \leq 0).$$

Ejercicio

Considere los conjuntos siguiente $A = \{-1, 1, 2, 23\}$ y

$$B = \left\{-4, -\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

- 1** Demuestre que el valor de verdad de

$$(\exists x \in A)(\forall y \in B)[(x - 3y \leq 1) \implies (2x + 3y < 2)]$$

es verdadero.

- 2** Niegue la proposición del item 1).

Respuestas:

- 1** El valor de verdad es verdadero. Si considera $x = -1$ y todos los elementos en B , la proposición es cierta.
- 2** La negación viene dada por:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x - 3y \leq 1) \wedge (2x + 3y \geq 2)]$$

Ejercicio

Niegue las siguientes proposiciones.

1 $(\exists x \in U : p(x)) \implies (\exists x \in U : \sim q(x))$

2 $(\exists x \in U : p(x) \wedge \sim q(x))$

3 $(\exists x \in U : p(x)) \wedge (\forall x \in U : \sim q(x))$

4 $(\forall x \in U : p(x)) \implies (\forall x \in U : q(x))$

5 $(\exists x \in U : \sim p(x)) \implies (\forall x \in U : \sim q(x))$

Respuestas:

1 $(\exists x \in U : p(x)) \wedge (\forall x \in U : q(x))$

2 $(\forall x \in U : \sim p(x) \vee q(x))$

3 $(\forall x \in U : \sim p(x)) \vee (\exists x \in U : q(x))$

4 $(\forall x \in U : p(x)) \wedge (\exists x \in U : \sim q(x))$

5 $(\exists x \in U : \sim p(x)) \wedge (\exists x \in U : q(x))$

Ejercicio: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, considerando $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1 $(\exists x \in U)(x + 3 \neq 10)$

2 $(\forall x \in U)(x^2 - 1 \geq 10)$

3 $(\forall x \in U)(\exists y \in U)(x \leq y)$