Álgebra Lineal

Felipe Fresno R.

Universidad
Alberto Hurtado

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Universidad
Alberto Hurtado

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Un subconjunto H de $\mathbb{R}^n$ se dice que es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si tiene las siguientes tres propiedades:

1. El vector nulo está en H.
2. H es cerrado bajo la suma de vectores. Es decir, si u y v pertenecen a H entonces $u + v$ también pertenece a H.
3. H es cerrado bajo la multiplicación escalar. Es decir, si u está en H y t es un escalar, entonces $t \cdot u$ también pertenece a H.

El conjunto $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. Geométricamente H corresponde a una recta de pendiente $m = 1$ que pasa por el origen de $\mathbb{R}^2$.

Para probar que H es subespacio de $\mathbb{R}^2$ hay que entender primeramente cómo son los vectores que pertenecen a este conjunto. Dichos vectores son aquellos en que la segunda coordenada es igual a la primera. Así, el vector $(5, 5) \in H$ pero $(1, 3)$ no lo está. Otro vector que sí está en H es el vector $(0, 0)$. Es decir, el vector nulo pertenece a H.

Por otro lado, sean $u = (u_1, u_1)$ y $v = (v_1, v_1)$ vectores en H. Luego,

$$u + v = (u_1, u_1) + (v_1, v_1) = (u_1 + v_1, u_1 + v_1).$$

Como la primera y segunda componentes son iguales, entonces $u + v$ pertenece a H.

Finalmente, si

$$t \in \mathbb{R} \text{ y } u = (u_1, u_1) \in H \text{ se tiene que } t \cdot (u_1, u_1) = (tu_1, tu_1)$$

y por lo tanto $t \cdot u$ está en H.

En resumen, H contiene al vector nulo de $\mathbb{R}^2$ y H es cerrado bajo suma y multiplicación por escalar. Por lo tanto, H es subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Un ejemplo de un subconjunto que **no** es un subespacio es

$$H = \left\{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : y = x\right\}$$

Esto debido a que el vector nulo de $(0, 0, 0) \notin H$. Dado que los vectores que si están en H son aquellos que tienen tercera componente igual a 1.

Veamos que el siguiente conjunto es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Sea

$$H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y - z = 0\right\}$$

Se mostrará que H contiene al vector nulo , que es cerrado bajo suma y bajo multiplicación por escalar.

En primer lugar, observar que el vector nulo $(\underbrace{0}_{x}, \underbrace{0}_{y}, \underbrace{0}_{z})$ cumple con que

$$-x + y - z = -0 + 0 - 0 = 0$$

Por lo tanto el vector $(0, 0, 0) \in H$.

Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores pertenencientes al conjunto H, entonces se cumple que $-u_1 + u_2 - u_3 = 0$ y $-v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Sumando ambas ecuaciones se obtiene que:

$$\begin{array}{rcl}
-u_1 + u_2 - u_3 & = & 0 \\
-v_1 + v_2 - v_3 & = & 0 \\
-u_1 - v_1 + u_2 + v_2 + u_3 - v_3 & = & 0 \\
-(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) & = & 0
\end{array}$$

Por lo tanto el vector $u + v \in H$.

Por otro lado, sea $t \in \mathbb{R}$ y $u = (u_1, u_2) \in H$. Demostraremos que $t \cdot u \in H$. Como $u \in H$ entonces

$$\begin{aligned} -u_1 + u_2 - u_3 &= 0 / \cdot t \\ t \cdot (-u_1 + u_2 - u_3) &= t \cdot 0 \\ -t \cdot u_1 + t \cdot u_2 - t \cdot u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $t \cdot u \in H$.

En conclusión, H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Demostraremos que el conjunto $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}$ no tiene estructura de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

En efecto, los vectores $(2, 4)$ y $(3, 9)$ son elementos de H. Sin embargo la suma de ellos no lo está. Ya que

$$(2, 4) + (3, 9) = (5, 13)$$

y este vector no es tal que su segunda componente sea igual al cuadrado de la primera. Por lo tanto, H al no ser cerrado bajo suma, no tiene estructura de subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$

1. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0\}$
2. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 4y = 0 \wedge z - 2y = 0\}$
3. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3y - z = 0\}$
4. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = z\}$
5. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \wedge x - y - z = 0\}$

Sea $v \in \mathbb{R}^n$. Se dice que el vector v es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de $\mathbb{R}^n$ **si y sólo si** existen escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$$

Lo anterior también es posible expresarlo con la notación de sumatoria de la siguiente manera:

$$v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$$

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de k vectores de $\mathbb{R}^n$. El **subespacio generado por S** corresponde al conjunto de todas las combinaciones lineales que se pueden formar con dichos vectores.

Tal subespacio se denota como

$$\text{Gen}\left(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\right) \text{ o bien } < \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} > .$$

Probar que $\text{Gen}\left(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\right)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Entonces:

1. El **espacio fila** de A se denota como $\text{Fil}(A)$ y es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A.
2. El **espacio columna** de A se denota como $\text{Col}(A)$ y es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A.

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. Probaremos que el vector columna $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ pertenece al espacio $\text{Col}(A)$.

Según la definición de espacio generado, $v \in \text{Col}(A)$ si y sólo si existen escalares reales α_1 y α_2 tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Lo anterior es equivalente a que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2 &= 2 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 &= 3 \end{aligned}$$

sea compatible o consistente

Se analiza la matriz ampliada:

$$(A;B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & -3 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Como $r(A)=r(A;B)=2$ (número de incógnitas) entonces el sistema tiene solución única. Es decir, existen los escalares $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Luego, el vector $v\in \mathrm{Col}(A)$.

Teorema: Sea B una matriz tal que $A \sim B$ entonces $\text{Fil}(A) = \text{Fil}(B)$.

Ejercicio: Demuestre que una base del espacio fila de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

es

$$B = \{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1] \quad , \quad [0 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 3] \quad , \quad [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4]\}$$

Demuestre que una base del espacio columna de la matriz anterior es

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Además pruebe que la relación de dependencia entre las columnas es que

$$c_3 = c_1 + 2c_2 \text{ y } c_5 = -c_1 + 3c_2 + 4c_4$$

Sea A una matriz de orden $m \times n$. El **espacio nulo** de A es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ que consiste de las soluciones del sistema lineal homogéneo $AX = 0$. Se denota como $\mathrm{Nul}(A)$ o núcleo de A.

Verificar que el espacio nulo de la matriz anterior es

$$\mathrm{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\0\\-4\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

Notar que como los dos vectores generan al espacio nulo y además son linealmente independientes entonces constituyen una base del dicho subespacio.

Los subespacios tienen múltiples bases, es decir, conjuntos de vectores que generan al espacio en cuestión cuyos vectores son linealmente independientes. Por ejemplo,

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

son dos bases del $\mathbb{R}^2$.

Notar que ambas bases tienen la misma cantidad de vectores. Esto no es casualidad y es un hecho que se establece en el siguiente resultado:

Teorema: Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Entonces cualquiera dos bases de H tienen el mismo número de vectores.

Una definición importante relativa a la cantidad de vectores que contiene una base es la siguiente:

Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces el número de vectores en una base para H se llama la **dimensión** de H y se denota como $\dim(H)$.

Por lo que la dimensión del espacio fila y columna de la matriz A anteriormente estudianda es 3. Mientras que la dimensión del espacio nulo es 2. Esto se escribe como :

$$\dim(\mathrm{Fil}(A)) = 3, \dim(\mathrm{Col}(A)) = 3 \text{ y } \dim(\mathrm{Nul}(A)) = 2.$$

El que $\dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$ no es casual y se debe al siguiente resultado:

Los espacios fila y columna de una matriz A tienen la misma dimensión. Es decir, $\mathbf{dim}(\mathbf{Fil}(A) = \mathbf{dim}(\mathbf{Col}(A))$.

Observación: Del curso de Álgebra II se sabe que el rango de una matriz A es igual a la cantidad de filas no nulas de la matriz escalonada reducida por fila asociada a A.

A continuación se entrega otra definición de rango: El rango de una matriz A es la dimensión de sus espacios fila y columna. Se denota como $r(A)$.

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que $r(A) =$ número de filas no nulas de la matriz escalonada reducida por filas $= 3$. Pero por otra lado, el rango de A se podría obtener a través de la dimensión del espacio fila o columna que deben ser iguales y en este caso

$$\dim(\text{Fil}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = 3$$

Por lo que el rango es 3. Valor que coincide con el número de filas no nulas de la matriz escalonada reducida por filas.

La nulidad corresponde a la dimensión del espacio nulo de la matriz A y se denota como $\eta(A)$.

Determine la nulidad de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución. Como

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{9}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es base del espacio nulo, entonces $\eta(A) = 1$.

Teorema del rango: Sea A una matriz de orden $m \times n$, entonces

$$r(A) + \eta(A) = n = \text{número de columnas}$$

Determine la nulidad de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Solución:Como $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $r(A) = 2$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} r(A) + \eta(A) = 4 \quad &\iff \quad 2 + \eta(A) = 4 \\ &\iff \quad \eta(A) = 4 - 2 \\ &\iff \quad \eta(A) = 2 \end{aligned}$$

Teorema fundamental de las matrices invertibles: Sea A una matriz cuadrada de orden n. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $AX = B$ tiene solución para todo $B \in \mathbb{R}^n$.
3. $AX = 0$ tiene sólo la solución trivial.
4. La forma escalonada reducida por filas de A es $I_n =$ matriz identidad de orden n.
5. $r(A) = n$.
6. $\eta(A) = 0$.
7. Las columnas de A son linealmente independientes.
8. Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
9. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.
10. Las filas de A son linealmente independientes.
11. Las filas de A generan a $\mathbb{R}^n$.
12. Las filas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

Demuestre que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

constituye una base de $\mathbb{R}^3$.

Se utiliza el Teorema fundamental de las matrices invertibles. Usaremos (5), es decir, probaremos que el rango de A, la matriz cuyas columnas son los vectores dados, es igual a 3 y por el teorema, B será base de $\mathbb{R}^3$. En efecto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $r(A) = 3$ entonces B es base de $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas

El siguiente teorema nos proporciona otra caracterización para las bases de un subespacio de $\mathbb{R}^n$: Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores de H.

B es base de $H \iff$ todo vector $v \in H$ se escribe de única manera como combinación lineal de los vectores de B.

El teorema precedente asegura que para cada vector $v \in H$ existen **únicos** escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Estos escalares reciben el nombre de **coordenadas del vector v con respecto a la base B** y se denotan

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dado que $[v]_B \in \mathbb{R}^n$, este vector recibe el nombre de **vector coordenado** de v con respecto a la base B.

Por ejemplo, el vector coordenado de $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ respecto a la base canónica $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es $[v]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

¿Cuáles son las coordenadas de $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ respecto a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$?

Se debe resolver la ecuación

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{aligned} 5\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 6 \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 &= -5 \end{aligned}$$

De aquí,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Considere la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

a. Si $v \in \mathbb{R}^3$ es tal que $[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine el vector v.

b. Determine $[v]_C$, donde C es la base

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Respuestas: $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $[v]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y sea

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine $[v]_B$

La solución es

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -2a - 3b + 2c \\ 4a + 4b - 3c \\ -a - b + c \end{pmatrix}$$

Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y sea

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine $[v]_B$

La solución es

$$[v]_B = \begin{pmatrix} -a - b + 2c \\ a + 2b - 3c \\ -2a - 4b + 7c \end{pmatrix}$$

Introducción a las transfromaciones lineales

Universidad
Alberto Hurtado

Considerar el siguiente ejemplo: Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{2\times 1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1} \end{aligned}$$

Esto indica que la matriz A “transforma” al vector v en $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Y si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un vector cualquiera del plano, ¿qué efecto tendrá la matriz sobre este vector?

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}_{3\times 1} \end{aligned}$$

En lugar de escribir Av escribiremos dicha transformación como $T_A(v)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_A(v) &= Av \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Con esto en mente, se introducirá alguna terminología:

• Una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ corresponde a una regla que asigna a cada vector $v \in \mathbb{R}^n$ un único vector $T(v) \in \mathbb{R}^m$.

• El dominio de T se denota como $\mathrm{dom}(T)$ y corresponde al conjunto de partida. Mientras que el conjunto de llegada se llama el codominio de T y se denota como $\mathrm{codom}(T)$. Así, $\mathrm{dom}(T) = \mathbb{R}^n$ y $\mathrm{codom}(T) = \mathbb{R}^m$.

• Si $v \in \mathrm{dom}(T)$ entonces el vector $T(v)$ se llama la imagen de v bajo T y v se dice que es la pre-imagen del vector $T(v) \in \mathrm{codom}(T)$.

• Al conjunto de todas la imágenes posibles $T(v)$ (conforme v varía en el $\mathrm{dom}(T)$) se llama rango de T.

En nuestro ejemplo se tiene que $\mathrm{dom}(T_A) = \mathbb{R}^2$ y $\mathrm{codom}(T_A) = \mathbb{R}^3$ y que la imagen del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es $T_A(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como ejercicio determinaremos el rango la transformación $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\text{rango}(T_A) &= \{T_A(v) : v \in \text{dom}(T)\} \\
&= \left\{ T_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Gen}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right) \\
&= \text{espacio columna de } A \\
&= \text{Col}(A)
\end{aligned}$$

O sea que el rango de T_A justo coincide con el espacio columna de la matriz A.

Una transformación $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llama transformación lineal si T satisface las dos condiciones siguientes:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo vector u y v en $\mathbb{R}^n$.
2. $T(cv) = cT(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ y todo escalar c.

Observación: Las condiciones anteriores pueden resumirse en una sola. Así, $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se llama transformación lineal si T cumple que $T(cu+v) = cT(u) + T(v)$ para todo par de vectores u y v en $\mathbb{R}^n$ y c escalar.

Un ejemplo: Sea A una matriz de orden $m \times n$. Entonces la transformación matricial $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T_A(x) = Ax \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es una transformación lineal.

En efecto, sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$ y c un escalar, entonces

$$\begin{aligned} T_A(cu+v) &= A(cu+v) \\ &= A(cu) + Av \\ &= c(Au) + Av \\ &= cT_A(u) + T_A(v) \end{aligned}$$

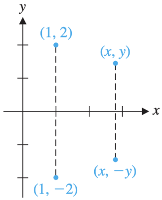
Por lo tanto la transformación matricial T_A es lineal.

Demostraremos que $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ es una transformación lineal. En efecto, sean $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y c un escalar. Luego,

$$\begin{aligned}
T(cu+v) &= T\left(c\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cy_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cx_1 + x_2 + cy_1 + y_2 \\ cx_1 + x_2 - (cy_1 + y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cx_1 + cy_1 + x_2 + y_2 \\ cx_1 - cy_1 + x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot (x_1 + y_1) \\ c \cdot (x_1 - y_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\
&= c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} = cT(u) + T(v).
\end{aligned}$$

Por lo que T es lineal.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación que envía cada punto a su reflexión en el eje X. Demostraremos que T es lineal. Geométricamente la reflexión se observa de la siguiente manera:



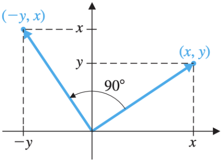
De la figura se puede observar que T envía al punto (x, y) en $(x, -y)$. Por lo que T puede definirse a través de la fórmula $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

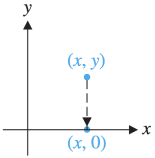
Por lo que T es una transformación matricial y por lo tanto es una transformación lineal.

Demuestre a través de la definición y por medio de transformaciones matriciales que las siguientes transformaciones son lineales.

1. Sea $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Esta transformación rota cada punto en 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen tal como lo muestra la siguiente figura:



2. Sea $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ la transformación que proyecta un punto sobre el eje X. Demuestre que P es una transformación lineal.



El siguiente resultado establece que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se puede representar mediante una matriz de orden $m \times n$.

Teorema: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canónica del dominio $\mathbb{R}^n$. Entonces T es una transformación matricial, es decir, T se puede describir a través la matriz A de orden $m \times n$ siguiente:

$$A = [T(e_1);\ \ T(e_2); ...;\ \ T(e_n)]$$

donde las columnas de esta matriz corresponden a las imágenes de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Esta matriz se llama matriz estándar o canónica de la transformación lineal T.

Determine la matriz estándar asociada a la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ x + 3y \\ 2x + 5y \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz que representa a T se deben encontrar las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathrm{dom}(T) = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ T(e_2) &= T\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En consecuencia la matriz estándar de T es

$$\begin{aligned} A &= [T(e_1);\ T(e_2)] \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notar que T va desde $\mathbb{R}^2$ hacia $\mathbb{R}^3$ y el orden de A es 3×2.

Ejercicios

1. Sea $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación matricial correspondiente $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Encuentre $T_A(u)$ y $T_A(v)$ donde $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x \\ 3x - 7y \end{pmatrix}$. Demuestre que T es lineal y determine la matriz estándar asociada.

3. Determine la matriz estándar de la transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que satisface que $T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $T(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $T(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la fórmula asociada a la transformación T?

Una transformación lineal importante es aquella que rota un punto del plano $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en un ángulo θ en torno al origen en el sentido opuesto a las manecillas del reloj. La matriz que representa a esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ejercicio: Rotar en el 60° punto $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en torno al origen.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y defina la transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ por $T(x) = Ax$, de manera que

$$T(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y \\ 3x + 5y \\ -x + 7y \end{pmatrix}$$

1. Encuentre $T(u)$.
2. Encuentre $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = b$.
3. ¿Hay más de una $x \in \mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea b?.
4. Determine si $c \in \text{rango}(T)$.

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Se dice que T es sobreyectiva o epiyectiva o sobre si cada vector $b \in \mathbb{R}^m$ es la imagen de al menos un vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Simbólicamente,

$$\begin{aligned}
T \quad \text{es sobreyectiva} \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{para todo} \quad b \in \mathbb{R}^m \quad \text{existe} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que} \quad T(x) = b \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{el sistema de ecuaciones} \quad Ax = b \quad \text{tiene solución} \\
&\Longleftrightarrow \quad r(A) = m
\end{aligned}$$

donde A es la matriz que representa a la transformación T.

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. T es inyectiva o uno a uno si y sólo si el sistema de ecuaciones $Ax = 0$ tiene como única solución a la trivial. Donde A es la matriz que representa a T. O equivalentemente, T es inyectiva si y sólo si $\eta([T]) = 0$.

Ejemplo: Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz de representación es

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Estudie sobreyectividad e inyectividad.

Solución:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $r([T]) = 3 = \dim(\text{Codom})(T)$ entonces T es sobreyectiva. Por otro lado, por el teorema del rango, se tiene que $r([T]) + \eta([T]) = 4$. Como $r([T]) = 3$ entonces $\eta([T]) = 1 \neq 0$ y por tanto T no es inyectiva.

Ejercicios

1. Sea $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$ Analizar inyectividad y sobreyectividad de T.

2. Sea $F:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por
$$F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-2b-3d \\ 3a-4b+c-kd \\ a+c \end{pmatrix}$$
Determine $[F]$ la matriz asociada a F y todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que F sea epiyectiva.

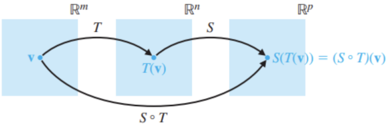
3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ la matriz que representa a una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Demuestre que T no es inyectiva.

Composición de transformaciones lineales

Sean $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. La composición entre T y S se denota $S \circ T$ y se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S \circ T : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (S \circ T)(v) &= S(T(v)) \end{aligned}$$

Esquemáticamente la composición entre T y S se muestra a continuación:



Notar que para que la composición $S \circ T$ esté definida, es decir exista, debe cumplirse que el codominio de T tiene que coincidir con el dominio de S.

Sean $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transformaciones lineales. Entonces $S \circ T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ también es una transformación lineal, y sus matrices de representación (matrices estándar) se realacionan mediante

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

Dicho en palabras, la matriz de la composición es igual al producto de las matrices.

Observación: Dado que $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, entonces $[S]_{p\times n}$ y $[T]_{n\times m}$. Por lo tanto el producto matricial $[S]_{p\times n} \cdot [T]_{n\times m}$ está bien definido.

Por ejemplo, Si $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales, entonces la matriz $[S \circ T]$ será de orden 2×4. ¿Por qué?

Y si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ y $S : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ¿Qué dimensión tendrá la matriz $[S \circ T]$?

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Y sea $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ 3y - z \\ x - y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

Encuentre una fórmula para $S \circ T$. ¿Qué orden tendrá la matriz que representa a la composición?

La respuesta es: La transformación composición $S \circ T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y es tal que

$$(S \circ T)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5x + 4y \\ 3x - 7y \\ -x + y \\ 6x + 3y \end{pmatrix}$$

1. Encuentre la matriz estándar de la transformación que primero rota un punto en 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen y luego refleja el resultado en el ese X.

2. Considere las transformaciones lineales $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que refleja el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto a la recta $y = x$ y $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

   Si la matriz que representa a R es $[R] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar $T \circ R$.

   b) Obtener $(T \circ R)\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

   c) Estudiar epiyectividad e inyectividad de la transformación $T \circ R$.

Transformación lineal inversa

Considere una rotación de 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen, seguido por una rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj. Claramente, esto deja todo punto en $\mathbb{R}^2$ sin cambios.

Si denotamos como R_{90° R_{-90° a estas transformaciones respectivamente, entonces se tiene que

$$(R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ})(v) = v \text{ para todo } v \in \mathbb{R}$$

También ocurre que

$$(R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ})(v) = v \text{ para todo } v \in \mathbb{R}$$

Las trasformaciones $R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ}$ y $R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ}$ se conocen como **transformación identidad**.

En general, la transformación identidad es una transformación lineal $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $I(v) = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto,

$$(R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ})(v) = (R_{-90^\circ} \circ R_{-90^\circ})(v) = I(v) = v$$

De este modo, con esta notación,

$$R_{90^\circ} \circ R_{-90^\circ} = I = R_{-90^\circ} \circ R_{90^\circ}$$

Un par de transformaciones que se relacionan mutuamente de esta forma se llaman **transformaciones inversas.**

Definición: Sean S y T transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces S y T son transformaciones inversas si y sólo si

$$S \circ T = T \circ S = I.$$

Cuando ocurra esta situación, se dice que S es la transformación inversa de T y que T es la transformación inversa de S. Más aún, se dirá que S y T son invertibles.

Teorema: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible. Entonces la matriz estándar de $[T]$ es una matriz invertible y

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

En palabras: la matriz de la inversa es la inversa de la matriz.

Definición: Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. T es invertible si y sólo si T es sobreyectiva e inyectiva, es decir: biyectiva.

Considere la transformación lineal $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que F es invertible.

b) Determine la transformación F^{-1}.

c) Obtenga la imagen del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ bajo F^{-1}.

Determinantes

Universidad
Alberto Hurtado

Asociado a una matriz A cuadrada de orden n existe un número real, su determinante, que lo denotaremos como $\det(A)$ o $|A|$.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ entonces } \det(A) = ad - bc$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$$

Calcular los siguientes determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n. Llamaremos **menor** de orden ij de A, y lo antaremos M_{ij}, al determinante de orden $n-1$ que se obtiene eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna a la matriz A.

Por ejemplo,
Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ entonces } M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6.$$

Si

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -1 \end{pmatrix} \text{ entonces } M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Si

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

calcular M_{12} y M_{22}.

El **cofactor** de orden ij de una matriz A, denotado C_{ij} es el número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Calcule los cofactores C_{13} y C_{32} de la matriz B anterior.

El determinante de la matriz A de orden n es el número

$$\det(A) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{fijo} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{fijo} \end{cases}$$

Por ejemplo, calculemos el determinanante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ fijando $i = 1$.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} M_{13} \\
&= (-1)^{2}(1) M_{11} + (-1)^{3}(3) M_{12} + (-1)^{1+3}(-9) M_{13} \\
&= M_{11} - 3M_{12} - 9M_{13} \\
&= -20 - 12 + 72 \\
&= 40
\end{aligned}
$$

Ahora calcular el mismo determinante pero fijando la columna $j = 2$. Comparar resultados.

Ejercicio: Sea

$$
C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.
$$

Calcular $\det(C)$ fijando $i = 3$ y $j = 2$.

Propiedades de los determinantes

Sean A y B matrices de orden $n \times n$. Entonces:

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
2. $\det(A) = \det(A^t)$, donde A^t = matriz traspuesta de A.
3. Si todos los elementos de una fila (o columna) de A son ceros entonces $\det(A) = 0$.
4. $\det(I_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Donde I_n es la matriz identidad de orden n.
5. Si A es una matriz diagonal o triangular, entonces $\det(A)$ es igual al producto de los elementos de la diagonal.
6. Si dos filas adyacentes o columnas adyacentes de A se intercambian, se produce un cambio de signo del determinante.
7. Si dos filas (o columnas) de A son iguales, entonces $\det(A) = 0$.

8 En general, $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$. Sin embargo, existe una propiedad que la enunciaremos en primer lugar para orden 2,

$$\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b \\ a_2+c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ a_2 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$$

Si A es cuadrada de orden n y $A^{(k)}, 1 \leq k \leq n$ denota la k - ésima columna de A, entonces

$$\det(A^{(1)},\cdots,A_1^{(k)}+A_2^{(k)},\cdots,A^{(n)}) =$$
$$\det(A^{(1)},\cdots,A_1^{(k)},\cdots,A^{(n)})+\det(A^{(1)},\cdots,A_2^{(k)},\cdots,A^{(n)})$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \\ -1 & 2+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

9 $\det(A^{(1)},\cdots,\alpha\cdot A^{(k)},\cdots,A^{(n)}) = \alpha\cdot\det(A^{(1)},\cdots,A^{(k)},\cdots,A^{(n)})$

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 4^2, calcular $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 12 & 4 & 4 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}$

10 Si se suma un múltiplo escalar de una fila (columna) de A a otra fila (columna) de A entonces el determinante de A **no** cambia.

Si la fila i multiplicada por el número α la sumamos a la fija j, anotaremos $\alpha F_i + F_j$.

Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 2 & -7 & -3 \\ 4 & -12 & 1 \end{vmatrix}$ usaremos la operación $-2F_1 + F_2$ a continuación $-4F_1 + F_3$ y luego desarrollaremos fijando la primera columna.

Ejercicios

1. $\begin{vmatrix} 1 & a+b & b \\ 1 & a+c & c \\ 1 & a+d & d \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

3. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ calcular $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

11 Determinantes de matrices elementales: Recordar que una matriz elemental resulta de realizar solo una operación elemental fila a la matriz identidad. Entonces:

a) Si E resulta de intercambiar dos filas de I_n entonces $\det(E) = -1$.

b) Si E resulta de multiplicar una fila de I_n por $k \neq 0$ entonces $\det(E) = k$.

c) Si E resulta de sumar un múltiplo de una fila de I_n a otra fila, entonces $\det(E) = 1$.

Calcular los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

12 Regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccccc} & & & - \;\; - & - \\ \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right. & \hspace{-1em} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right] & \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ & & + \;\; + & + \end{array}$$

Este método produce

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

13 Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Determine el valor de m de modo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & m^2 - 5 \end{pmatrix}$ sea invertible.

14 Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces $\det(kA) = k^n \det(A)$.

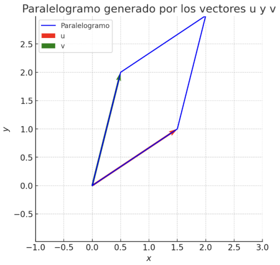
Calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

15 Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Aplicaciones de los determinantes

1 Sean $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ vectores del plano.



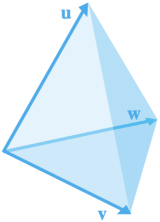
El área del paralelógramo que se forma con u y v viene dada por la expresión

$$A = |\det([u \quad v])|$$

Encuentre el área del paralelógramo cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(5,2)$, $C(6,4)$ y $D(11,6)$. Respuesta: 8

2 Sean u, v y w vectores del espacio. Entonces el volumen del paralelepípedo determinado por u, v y w está dado por

$$V = |\det(u \quad v \quad w)|$$



Encuentre el volumen del paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes $(1,0,-2),(1,2,4)$ y $(7,1,0)$. Respuesta 22.

Valores y vectores propios

Universidad
Alberto Hurtado

Sea A una matriz de orden $n \times n$. Un escalar λ real o complejo, se llama valor propio de A si existe un vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$. Tal vector v se llama vector propio asociado a λ.

Por ejemplo, El vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, esto pues:

$$\begin{aligned} Av &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 4v \end{aligned}$$

Como $Av = 4v$ entonces v es vector propio de A y su valor propio asociado es $\lambda = 4$.

Ejercicio: Verificar que $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 27 & -10 \\ 75 & -28 \end{pmatrix}$. Encuentre el valor propio asociado.

Si λ es un valor propio de A y denotamos por V_λ al conjunto de todos los vectores de A asociados al valor propio λ, V_λ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y se llama espacio propio de A asociado al valor propio λ.

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$$

Los valores propios de la matriz A son las raíces o soluciones de la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Observe que $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ es un polinomio en λ de grado n y los valores propios son las raíces o soluciones de dicho polinomio o de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$.

$$p(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n : Av - \lambda v = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n)v = 0\} \end{aligned}$$

Es decir, los vectores propios de A asociados al valor propio λ son las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$.

El polinomio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

se llama **polinomio característico**.

Ejercicio: Determine valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: Para hallar los valores propios de A se debe resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \lambda = 3 \vee \lambda = -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios de A son -1 y 3.

Determinemos los espacios propios asociados.

$$
\begin{aligned}
V_{-1} &= \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (A - (-1)I_2)v = 0\right\} \\
&= \left\{v \in \mathbb{R}^2 : (A + I_2)v = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2a + b = 0 \wedge 4a + 2b = 0\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : b = -2a\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\right\} \\
&= Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

De forma análoga se obtiene que $V_3 = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$

1. Encuentre valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Encuentre valores propios de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$.

3. Si se sabe que el polinomio característico de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ es $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, encuentre los subespacios propios.

Ejercicio: Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3a + b - c \\ 2a + 2b - c \\ 2a + 2b \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores y vectores propios de la transformación T.

Respuesta: El polinomio característico de T es $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$. Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica 2. Mientras que los subespacios propios son

$$V_1 = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \text{ y } V_2 = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

La dimensión de los espacios propios se denomina multiplicidad geométrica. Así, la multiplicidad geométrica asociada al valor propio $\lambda = 1$ es 1 y la multiplicidad geométrica asociada al valor propio $\lambda = 2$ también es 1.

Encuentre valores y vectores propios para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución: El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$. Los valores propios son $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica igual a 2 y $\lambda = -2$ de multiplicidad algebraica igual a 1. Mientras que los subespacios propios son $V_0 = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ de multiplicidad geométrica igual a 2 y $V_{-2} = Gen\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ de multiplicidad geométrica igual a 1.

Definición: Una matriz cuadrada se dice triangular si y sólo si todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son cero.

La matriz se llamará triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero y se llamará triangular inferior si todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero.

Ejemplos: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ son matrices triangulares superior e inferior respectivamente.

Teorema: Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.

Como la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ es triangular inferior, entonces los valores propios son: $2, 1, 3$ y -2 de multiplicidad algebraica igual a 1 en todos los casos.

Las matrices diagonales son un caso particulares de matrices triangulares. Por lo que en este tipo de matrices también vale el teorema.

Los valores propios de una matriz entregan información respecto a su invertibilidad.

Teorema: Una matriz cuadrada A es invertible (A^{-1} existe) si y sólo si 0 no es valor propio de A.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es invertible dado que $\lambda = 0$ es valor propio. Es más, dado que A es una matriz triangular entonces su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Como $\det(A) = 0$ entonces A no es invertible.

Existen fórmulas amigables para los valores propios de las potencias de A y la inversa de una matriz.

Teorema: Sea A una matriz cuadrada con valor propio λ y valor propio asociado v.

1. Si $n \in \mathbb{Z}^+$ entonces λ^n es un valor propio de A^n con vector propio v.
2. Si A es invertible entonces para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, λ^n es un valor propio de A^n con vector propio v.

Caso particular: Si A es invertible y $n = -1$ entonces $\lambda^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1}.

¿Para qué sirve este resultado? Para calcular por ejemplo $A^{10}v$ con v valor propio. Veamos un ejemplo concreto.

Calcular $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como $n = 10 \in \mathbb{Z}^+$, usamos el inciso 1) del teorema precedente. Si v es vector propio de A entonces λ^{10} es valor propio de A^{10}, es decir: $A^{10}v = \lambda^{10}v$.

Diagonalización

Definición: Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n. Se dice que A es semejante a B si y sólo si existe una matriz invertible P del mismo orden tal que $P^{-1}AP = B$ o bien $AP = PB$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ son semejantes ya que existe una matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $AP = PB$. Verificar este hecho.

Definición: Una matriz cuadrada A se dice diagonalizable si y sólo si A es semejante a una matriz diagonal D. Esto es, si existe una matriz invertible P del mismo orden tal que $P^{-1}AP = D$. Tal matriz P se dice que diagonaliza a A.

Veamos que la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ diagonaliza a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Esto es equivalente a probar que la matriz A es diagonalizable.

En efecto: Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= D \end{aligned}$$

Una preguntal natural que se puede hacer es, ¿cómo construyo la matriz P que diagonaliza a A? Dado que en este ejemplo, la matriz P fue entregada explícitamente, pero ¿cómo se obtiene?

Teorema: Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:

$$A \text{ es diagonalizable} \iff A \text{ tiene } n \text{ vectores propios linealmente independientes.}$$

Más precisamente, si A es diagonalizable, la matriz P cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes de A, es la matriz que diagonaliza a A, esto es, $P^{-1}AP = D$, con D matriz diagonal. Además, los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A escritos en el mismo orden que los vectores propios asociados de A.

Consideremos la matriz estudiada anteriormente $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$. Obtuvimos que los subespacios propios eran:

$$V_0 = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right) \text{ y } V_{-2} = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right).$$

Como el conjunto de vectores propios es linealmente independiente, entonces la matriz P que diagonaliza a A es:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Teorema: Sea A una matriz de orden n y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ distintos valores propios de A. Si B_i es una base para el subespacio propio V_{λ_i}, entonces $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$ es un conjunto linealmente independiente.

Ejemplo: Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz diagonal, entonces los valores propios son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$.. Los espacios propios son $V_2 = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$, $V_3 = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$ y $V_5 = \text{Gen}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. El teorema garantiza que el conjunto formado por estos tres vectores propios es linealmente independiente.

Teorema: Sea A una matriz de orden $n \times n$ con n valores propios diferentes entonces A diagnonalizaable.

Ejercicio: Sea $A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 4 \\ 8 & 7 & -4 \\ -8 & -8 & 3 \end{pmatrix}$. Si $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$.

1. Encuentre bases para cada subespacio propio.
2. ¿Es A diagonalizable?
3. Si lo es, ¿cuál es la matriz que diagonaliza a A?

Otros criterios de diagonalización

Teorema: A matriz cuadrada de orden n. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. A es diagonalizable,
2. La multiplicidad algebraica de cada valor propio es igual a su multiplicidad geométrica. Esto quiere decir que el polinomio característico se escribe como:
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$$
donde $\alpha_i = \dim(V_{\lambda_i})$ y V_{λ_i} es el espacio propio asociado a λ_i.
3. $\dim(V_{\lambda_1}) + \dim(V_{\lambda_2}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_k}) = n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de A.

Usar el teorema precedente para demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Cálculo de potencias de matrices

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Utilizar el hecho de que A es diagonalizable para alcular A^{10}.

Para realizar este ejercicio tener presente el siguiente hecho: Si A es una matriz cuadrada de orden n diagonalizable, entonces existe P, una matriz invertible de orden n tal que $P^{-1}AP = D$. Pero,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D \quad &\Longrightarrow \quad AP = PD \\ &\Longrightarrow \quad A = PDP^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad A^k = (PDP^{-1})^k \\ &\Longrightarrow \quad A^k = PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcular A^{2025} si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Sistemas dinámicos discretos

Universidad
Alberto Hurtado

Sistemas Dinámicos Discretos

Un sistema dinámico discreto es una regla de la forma $x_{k+1} = Ax_k$. Donde x_k es el vector de estado del sistema en el paso o tiempo k, x_o es el estado inicial del sistema a partir del cual se generan los siguientes y A es una matriz fija.

Cuando A es una matriz cuadrada de orden 2, los cálculos de la dinámica del sistema, es decir, de cómo este evoluciona en el tiempo, se pueden complementar con una descripción geométrica de la evolución.

La ecuación $x_{k+1} = Ax_k$ se puede considerar como una descripción de qué le sucede al punto inicial $x_o = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, conforme se transforma repetidamente por la transformación $x \longrightarrow Ax$. La secuencia de puntos $x_o, x_1, x_2, \ldots$ se conoce como la trayectoria del sistema.

Ejemplo: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine los vectores x_2, x_3 y x_4 generados por el sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$.

Solución: Como $x_{k+1} = Ax_k$ entonces:

$$\begin{aligned} x_2 = Ax_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora a partir de x_2 se obtiene x_3:

$$\begin{aligned} x_3 = Ax_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prodeciendo de la misma forma se obtien que $x_4 = \begin{pmatrix} 16 \\ 54 \end{pmatrix}$.

¿Y si me piden calcular x_{100}?

Partiendo del estado inicial $\mathbf{x}_1$, los siguientes estados se calculan así:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2 = A(A\mathbf{x}_1) = A^2\mathbf{x}_1 \\
\mathbf{x}_4 &= A\mathbf{x}_3 = A^3\mathbf{x}_1 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= A^{k-1}\mathbf{x}_1
\end{aligned}$$

Por eso, si el índice parte en $\mathbf{x}_1$, la fórmula general es:

$$\boxed{\mathbf{x}_k = A^{k-1}\mathbf{x}_1}$$

🧠 Observación clave

Si el sistema parte desde $\mathbf{x}_0$, entonces:

$$\boxed{\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0}$$

Siempre revisa el **índice inicial del problema** para aplicar la fórmula correcta.

Por lo tanto, si nos piden calcular x_{100} se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x_{100} &= A^{100-1}x_1 \\
&= A^{99}x_1 \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{99} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{99} & 0 \\ 0 & 3^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{100} \\ 2 \cdot 3^{99} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinar x_{100}.

Ejercicio: Grafique varias trayectorias del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$, cuando

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de $\lambda_1 = 0.8$ y $\lambda_2 = 0.64$ son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificar este hecho.

Por otro lado, como $x_o \in \mathbb{R}^2$, entonces existen escalares C_1 y C_2 reales tales que:

$$\begin{aligned} x_o &= C_1 v_1 + C_2 v_2 \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} x_k &= A^k x_o \\ &= A^k (C_1 v_1 + C_2 v_2) \\ &= A^k \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Pero $Av_i = \lambda_i v_i$, así:

$$
\begin{aligned}
x_k &= A^k \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= C_1 A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= C_1 (0.8)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 (0.64)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_1 (0.8)^k \\ C_2 (0.64)^k \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Observar que $x_k \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a medida que $k \longrightarrow \infty$.. Cuando esto ocurre se dice que el vector nulo es un **atractor** del sistema dinámico. Es posible establecer el siguiente resultado:

El vector nulo de $\mathbb{R}^2$ es un **atractor** del sistema dinámico $\Longleftrightarrow |\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| < 1$.

A continuación se observa una imagen de diferentes trayectorias del sistema dado. Observar que las trayectorias convergen al vector nulo.

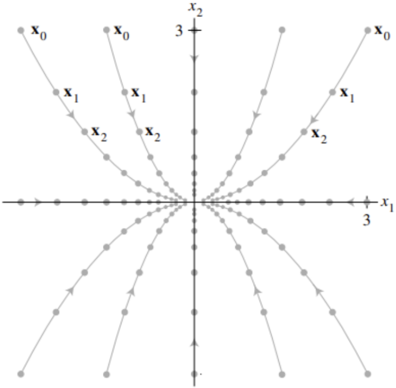


FIGURA 1 El origen como un atractor.

Ejemplo: Estudiar la evolución del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{pmatrix}$$

En este caso los valores propios son $\lambda_1 = 1.44$ y $\lambda_2 = 1.2$ Los vectores propios son nuevamente $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Del mismo análisis anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} x_k &= C_1(1.44)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2(1.2)^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1(1.44)^k \\ C_2(1.2)^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observar que a medida que $k \longrightarrow \infty$ entonces el vector x_k es tal que sus componentes se agrandan cada vez más.

Cuando esto ocurre, se dice que el origen del sistema es un repulsor del sistema dinámico. Geométricamente se tiene la siguiente representación:

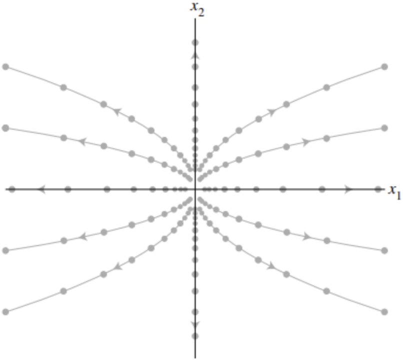


FIGURA 2 El origen como un repulsor.

Se tiene el siguiente resultado:

El vector nulo de $\mathbb{R}^2$ es un **repulsor** del sistema dinámico $\iff |\lambda_1| > 1 \wedge |\lambda_2| > 1$.

Ejemplo: Estudiar la evolución del sistema $y_{k+1} = Dy_k$ donde

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Observar que al ser los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0.5$ se tiene que $|\lambda_1| > 1 \wedge |\lambda_2| < 1$. La representación geométrica es la siguiente:

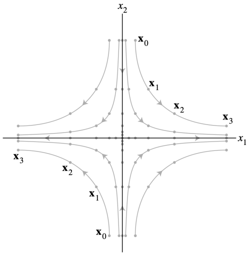


FIGURA 3 El origen como un punto silla.

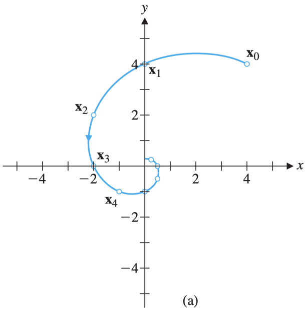
Cuando ocurre que algunas trayectorias se acercan al origen, pero otras se alejan, se dice que el vector nulo es un **punto silla** del sistema dinámica. Se tiene el siguiente resultado:

El vector nulo de $\mathbb{R}^2$ es un **punto silla** del sistema dinámico $\iff |\lambda_1| > 1 \wedge |\lambda_2| < 1$.

Sistemas dinámicos con valores propios complejos

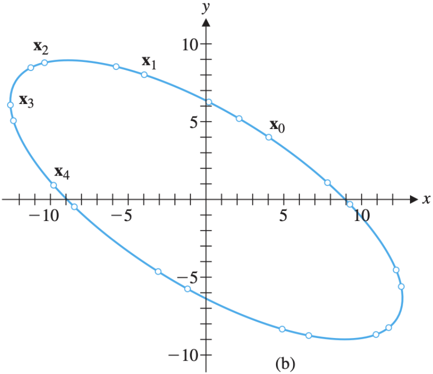
Cuando un sistema dinámico discreto tiene valores propios complejos, su comportamiento cambia radicalmente respecto al caso con valores propios reales: las soluciones ya no solo se acercan o alejan del origen, sino que **giran** alrededor de él.

Ejemplo: Grafique la trayectoria que comienza en $x_o = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ para el sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$ donde $A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$



(a)

Por otro lado, si consideramos el mismo vector inicial x_o pero ahora con la matriz $A = \begin{pmatrix} 0.2 & -1.2 \\ 0.6 & 1.4 \end{pmatrix}$, la trayectoria obtenida se muestra a continuación:



(b)

En este caso se tiene que los valores propios son $\lambda_1 = 0.8 + 0.6i \wedge \lambda_1 = 0.8 - 0.6i$. Luego, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1$.

Teorema: Sea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda = a \pm bi$, y si a y b no son ambos cero, entonces A puede factorizarse como:

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

donde $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se llama factor de escalamiento y θ es el ángulo principal de $a + bi$.

Teorema: Si una matriz A real 2×2 tiene valores propios complejos $\lambda = a \pm bi$, entonces las trayectorias del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$:

1. giran en espiral hacia adentro si $|\lambda| < 1$ (**O** es un atractor espiral).
2. giran en espiral hacia afuera si $|\lambda| > 1$ (**O** es un repulsor espiral).
3. se encuentran en una órbita cerrada si $|\lambda| = 1$ (**O** es un centro orbital).

Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$

Universidad
Alberto Hurtado

Sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$. El producto punto entre u y v se define como:

$$
\begin{aligned}
u \cdot v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots u_i v_i + \cdots + u_n v_n
\end{aligned}
$$

Ejemplo:

Si $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y v$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ entonces $u \cdot v = (-1)(1) + (2)(0) + (1)(-3) = -4$.

Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$. El producto punto entre vectores nos permite calcular

1. La longitud o norma de un vector: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$.
2. La distancia entre dos vectores: $d(u, v) = d(v, u) = \|u - v\|$.
3. El ángulo entre los vectores u y v : $\cos(\alpha) = \dfrac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.
4. Un vector u se dice unitario si y sólo si $\|u\| = 1$. Un vector arbitario se puede normalizar al ponderarlo por $\dfrac{1}{\|u\|}$.

Además, el producto punto entre vectores permite definir perpendicularidad entre ellos:

Sean u y v vectores en $\mathbb{R}^n$. Se dice que u es ortogonal con v si y sólo si el ángulo entres ellos es 0. Es decir:

$$
\begin{aligned}
u \perp v \quad &\iff \quad \angle(u, v) = \frac{\pi}{2} \\
&\iff \quad u \cdot v = 0
\end{aligned}
$$

Determine el valor de k tal que los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ sea ortogonal con $v = \begin{pmatrix} k+1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$

Sea u un vector perteneciente a un subespacio W de $\mathbb{R}^n$. Se dice que el vector u es ortogonal al subespacio W si y sólo si u es ortogonal a todo vector de W.

Simbólicamente,

$$u \quad \text{es ortogonal a} \quad W \iff u \cdot w = 0 \quad \text{para todo} \quad w \in W$$

Ejemplo: Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a + b - 2c = 0 \right\}$.

1. Encuentre una base para W.
2. Determine si el vector $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es ortogonal al espacio generado por W.

Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Se define $W^\perp$ al conjunto de todos aquellos vectores de $\mathbb{R}^n$ que son ortogonales al subespacio W. Esto es:

$$W^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \cdot w = 0 \quad \text{para todo} w \in W\}$$

El conjunto $W^\perp$ se llama complemento ortogonal de W y tiene estructura de subespacio de $\mathbb{R}^n$. En efecto:

- El vector nulo de $\mathbb{R}^n$ pertenece a $W^\perp$ ya que $0 \cdot w = 0$ para todo vector $w \in W$.

- Si $w_1, w_2 \in W^\perp$ entonces hay que probar $w_1 + w_2 \in W^\perp$. Así, si $u \in \mathbb{R}^n$ cualquiera, entonces

$$u \cdot (w_1 + w_2) = u \cdot w_1 + u \cdot w_2 = 0 + 0 = 0.$$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in W^\perp$ entonces hay que probar que $\alpha w \in W^\perp$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Luego:

$$u \cdot \alpha w = \alpha(u \cdot w) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto $\alpha w \in W^\perp$. Luego, $W^\perp$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

1. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 : a + 3b - 6c = 0 \right\}$. Encuentre $W^{\perp}$.
2. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0 \right\}$. Encuentre $W^{\perp}$.
3. Sea $W = Gen\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$. Encuentre $W^{\perp}$.