uah/ Facultad de Ingeniería
Universidad Alberto Hurtado

Álgebra Lineal
Guía 3: Transformaciones Lineales en $\mathbb{R}^n$

Problemas mínimos

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$ y defina la transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
   (a) Determine el dominio y el codominio de T.
   (b) ¿Porqué T es una transformación lineal?
   (c) Encuentre todos los vectores x de $\mathbb{R}^4$ que son transformados en el vector nulo por la transformación T.
   (d) ¿El vector $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece al rango (recorrido) de la transformación lineal T? Jusitifique.

2. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

3. Determine si la siguiente transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ es inyectiva y/o sobreyectiva:
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z - w \\ 2x - y - w \\ 3x + 4y - z \end{bmatrix}$$

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ -x \\ 3x - 7y \end{bmatrix}$$
   Demuestre que T es una transformación lineal, determine la matriz estándar de T y estudie sobreyectividad e inyectividad.

5. Determine la matriz estándar de la transformación lineal que satisface que

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

,

$$T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}$$

y

$$T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

.

¿Cuál es la fórmula asociada a la transformación lineal T?

6. Sea $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x+y\\x-y\end{bmatrix}$. Analizar inyectividad y sobreyectividad de T.

7. Sea $F:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$F\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-2b-3d\\3a-4b+c-kd\\a+c\end{bmatrix}$$

Determine $[F]$ la matriz estándar de F y todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ de modo que F sea sobreyectiva.

8. Sea $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-1&8\\-2&5&-1\end{bmatrix}$ la matriz que representa a una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$. Demuestre que T no es inyectiva.

9. Sea $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\2x-y\\3x+4y\end{bmatrix}$$

Y sea $S:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$S\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+z\\3y-z\\x-y\\x+y+z\end{bmatrix}$$

Encuentre una fórmula para $S \circ T$. ¿Qué orden tendrá la matriz que representa a la composición?

10. Considere las transformaciones lineales $R : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que refleja el punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ respecto a la recta $y = x$ y $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{bmatrix}$.

    a) Hallar $T \circ R$.

    b) Obtener $(T \circ R) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

    c) Estudiar sobreyectividad e inyectividad de la transformación $T \circ R$.

Problemas complementarios

(a) Encuentre la matriz estándar de la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que primero hace girar puntos a través de $-3\pi/4$ radianes (en el sentido horario) y después los refleja a través del eje horizontal x_1.