Álgebra II

Facultad de Ingeniería

Universidad Alberto Hurtado

Números Complejos

Resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es buscar un número real que satisfaga la condición $x^2 = -1$. Notar que no existe un número real tal que su cuadrado sea igual a -1. Para que sea posible la resolución de la ecuación, introducimos un nuevo número dado por la siguiente definición:

Definición: La cantidad $\sqrt{-1}$ se llama unidad imaginaria. Se la representa con el símbolo i y tiene la propiedad de que $i^2 = -1$.

Otra definición: Un número de la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, se llama un **número complejo**. El conjunto de todos los números complejos se denota como $\mathbb{C}$. Es decir:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi; a, b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad i^2 = -1\}$$

a se llama **parte real** del complejo y se denota $\operatorname{Re}(z)$ mientras que b corresponde a la **parte imaginaria** del complejo y se denota como $\operatorname{Im}(z)$. Así , $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$

Definición: Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Ejercicio: Determine los valores de x e y para los cuales se cumple que los números complejos $z_1 = -2 + (1 + 5y)i$ es igual al número complejo $z_2 = (7x + 5) - 9i$.

Dos números complejos que sólo difieren en el signo de sus partes imaginarias se llaman **números complejos conjugados. El conjugado de z se denota $\overline{z}$**

Ejemplo: Los números complejos $z_1 = 2 + 5i$ y $z_2 = 2 - 5i$ son números complejos conjugados ya que difieren en signo en su parte imaginaria.

El **módulo** o **valor absoluto** de un número complejo $z = a + bi$ corresponde al número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por ejemplo, si $z = -2 + 3i$ entonces $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Operaciones Fundamentales

1. **Adición:** Para sumar dos o más números complejos, se suman separadamente las partes reales e imaginarias del mismo modo como se reducen los términos semejantes de la adición entre $a + bx$ y $c + dx$, es decir:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (2 + 7i) + (-3 + 2i) &= (2 + (-3)) + (7 + 2)i \\ &= -1 + 9i \end{aligned}$$

Ejercicio: Si $\boldsymbol{z_1 = 2 + 4i}$ y $\boldsymbol{z_2 = 3 - 2i}$, calcular la suma $\boldsymbol{z_1 + \overline{z_2}}$.

2. **Sustracción:** Para restar un número complejo de otro, se restan las partes reales e imaginarias separadamente. Así tenemos:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejercicio: Si $\boldsymbol{z_1 = 3 - 4i}$ y $\boldsymbol{z_2 = 2 + 5i}$, calcular la diferencia $\boldsymbol{z_1 - z_2}$.

3. **Multiplicación:** El producto de dos números complejos se obtiene multiplicándolos como binomios ordinarios y luego reemplazar i^2 por -1.

Por ejemplo: si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 - 3i$ entonces

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + i) \cdot (2 - 3i) \\ &= (1)(2) + (1)(-3i) + (i)(2) + (i)(-3i) \\ &= 2 - 3i + 2i - 3i^2 \\ &= 2 - 3i + 2i - 3(-1) \\ &= 5 - i \end{aligned}$$

4. **División:** Para expresar el cuociente de dos números complejos como un solo número complejo, utilizamos un proceso análogo a la racionalización de un denominador. En este caso, se utiliza el conjugado del denominador tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{2-i}{2+2i} &= \frac{2-i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} \\
&= \frac{4-4i-2i+2i^2}{4-4i^2} \\
&= \frac{2-6i}{8} \\
&= \frac{1-3i}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i
\end{aligned}$$

Ejercicio: Si $z_1 = 3-i$ y $z_2 = 1+i$, calcular $\frac{z_2}{z_2}$.

La suma de números complejos es **asociativa** y **conmutativa**, posee elemento **neutro aditivo** (cero) $0 = 0 + 0i$ y cada elemento $z = a + bi$ posee **inverso aditivo** $-z = -a - bi$.

La multiplicación de números complejos es **asociativa** y **conmutativa**, posee elemento **neutro multiplicativo** (unidad) $1 = 1 + 0i$ y cada elemento, no cero, $z = a + bi$ posee **inverso multiplicativo**: $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$.

Además se verifica la ley distributiva, es decir,

$$\forall z, u, v \in \mathbb{C} \text{ se cumple que } z \cdot (u + v) = z \cdot u + z \cdot v.$$

En consecuencia, $\mathbb{C}$ posee estructura de cuerpo o campo. Pero a diferencia de los números reales, el cuerpo de los números complejes **no** es ordenado.

Propiedades del conjugado de un número complejo

Sean z y w dos números complejos, entonces:

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
5. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
6. $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$
7. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

Demuestre las propiedades anteriores

Ejercicio: Pruebe que si $z, u \in \mathbb{C}$ entonces $z\overline{u} + \overline{z}u \in \mathbb{R}$

Propiedades del módulo o valor absoluto de un número complejo

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z| = |\overline{z}|$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

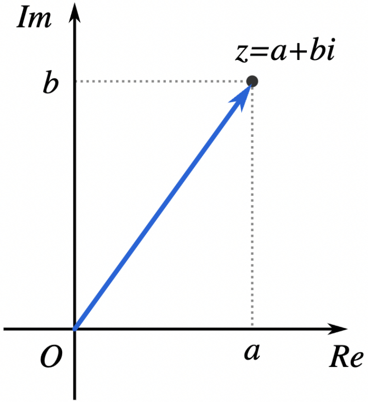
El plano complejo o plano de Argand

Existe una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a + bi & \longleftrightarrow & (a, b) \end{array}$$

Lo anterior sugiere representar a $\mathbb{C}$ en un sistema rectangular XY, donde las partes reales se indicarán en el eje X, que se llamará **eje real**, y en el eje Y estarán las partes imaginarias, por lo que tal eje será llamado **eje imaginario**. Mientras que el plano determinado por estos dos ejes se llamará **plano complejo** o **plano de Argand**.

A continuación se encuentra una representación del plano complejo.



El complejo $z = a + bi$ se puede representar mediante el par ordenado (a, b) (**forma cartesiana del complejo**) donde la primera componente es siempre la parte real de z mientras que la segunda componente siempre es la parte imaginaria de z.

Ejercicios propuestos

1. Sea $\omega \in \mathbb{C}$, si es que ω tiene módulo igual a la unidad, calcular $|\omega+1|^2+|\omega-1|^2$. **Respuesta: 4**
2. Encuentre todos los números complejos tales que $\omega^2+3\overline{\omega}=0$
3. Encuentre $\omega \in \mathbb{C}$ tal que la mitad de su cuadrado sea igual a un tercio de su conjugado.
4. Sea $\omega = a+bi \in \mathbb{C}$, encuentre a y b de modo que
$$\frac{\omega-12}{\omega-8i}=\frac{5}{3}$$

Subconjuntos del plano complejo

1 Represente geométricamente el conjunto

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 + i| \leq 4\}.$$

Solución: Sea $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$, luego

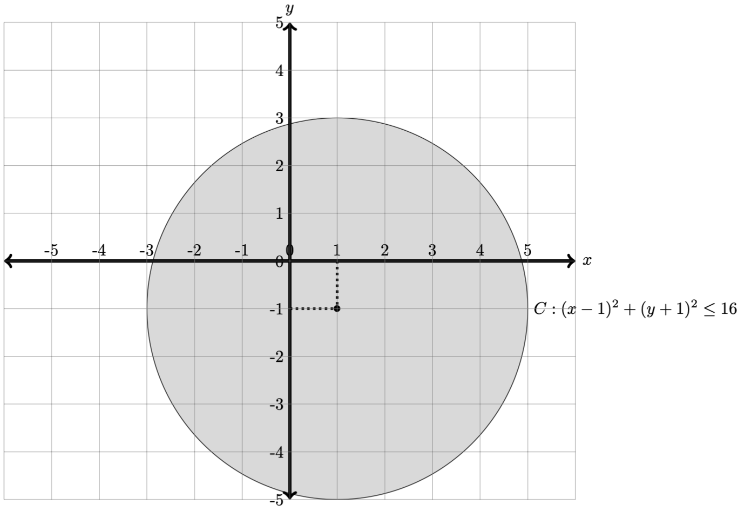
$$\begin{aligned} |z - 1 + i| &= |x + yi - 1 + i| \\ &= |(x-1) + (y+1)i| \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |z - 1 + i| \leq 4 \quad &= \quad |(x-1) + (y+1)i| \leq 4 \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \leq 4 \\ &\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los números $z \in \mathbb{C}$ que pertenecen a I son aquellos que se encuentran dentro del disco de centro $C(1, -1)$ y radio $r = 4$.

Geométricamente se tiene la siguiente representación



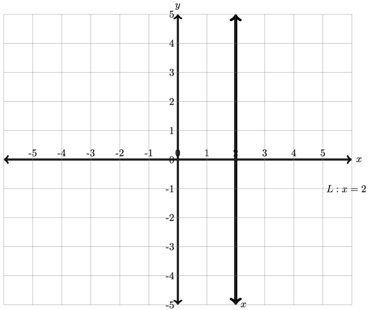
2 Represente geométricamente en el plano el conjunto

$$L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 2\}$$

Solución: Sea $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= 2 \\ \mathrm{Re}(x + yi) &= 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Por lo que L representa la recta de ecuación $x = 2$.



3 Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa

" La gráfica en el plano complejo de la expresión $\mathrm{Re}(\omega(1+i)) + \omega\overline{\omega} = 0$ corresponde a una circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}$"

Solución:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\omega(1+i)) + \omega\overline{\omega} &= 0 \\
\mathrm{Re}((a+bi)(1+i)) + (a+bi)(a-bi) &= 0 \\
\mathrm{Re}(a+ai+bi-b) + a^2+b^2 &= 0 \\
\mathrm{Re}((a-b)) + (a+b)i + a^2+b^2 &= 0 \\
a-b+a^2+b^2 = 0 \\
\left(a^2+a+\frac{1}{4}\right) + \left(b^2-b+\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\
\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Lo que es una circunferencia de centro $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo que la aseveración es **falsa**.

4 Determine si la siguiente aseveración es verdadera o falsa

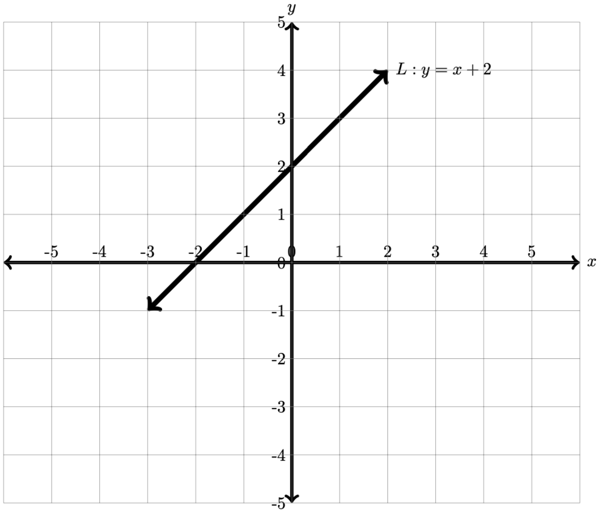
“ La región del plano complejo determinado por $\mathbf{Im}(\omega - i) = \mathbf{Re}(\omega + 1)$ corresponde a una línea recta con pendiente positiva”

Solución: Sea $\omega = x + yi$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\omega - i) = \mathrm{Re}(\omega + 1) &\iff \mathrm{Im}(x + yi - i) = \mathrm{Re}(x + yi + 1) \\
&\iff \mathrm{Im}(x + (y-1)i) = \mathrm{Re}((x+1) + yi) \\
&\iff y - 1 = x + 1 \\
&\iff y = x + 2
\end{aligned}$$

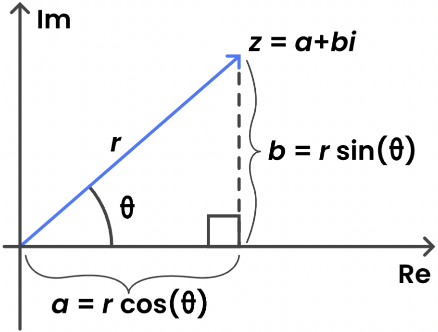
$L : y = x + 2$ tiene pendiente $m = 2 > 0$ por lo que la afirmación es **verdadera**.

Geométricamente la recta de ecuación $L : y = x + 2$ es:



Forma polar o trigonométrica de un número complejo

El número complejo $z = a + bi$ geométricamente representa el punto $P(a, b)$ del plano cartesiano, su módulo o valor absoluto $|z| = r$ corresponde a la distancia entre el origen del plano al punto, que se representado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Sea θ el ángulo definido por el vector $\overrightarrow{oz}$ y el eje real, dicho ángulo se llama **argumento** del complejo z y es tal que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{b}{r}\right)$$

En la figura se observa que

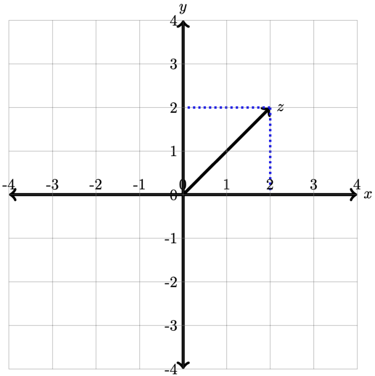
$$a = r \cdot \cos(\theta) \wedge b = r \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

Sea $z = a + bi$, reemplazando los valores de a y b anteriores se obtiene

$$z = r \cdot \cos(\theta) + r \cdot \operatorname{sen}(\theta) i \Longleftrightarrow z = r \cdot (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))$$

La expresión $z = r \cdot (\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$, que también será denotada $z = |z| \cdot e^{i\theta} = r \cdot cis(\theta)$ se llama **forma polar** o **trigonométrica** del número complejo z.

1 Escribir $z = 2 + 2i$ en su forma trigonométrica. En primer lugar se dibuja el complejo z.

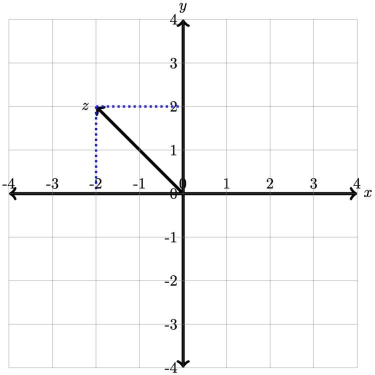


$$r = 2\sqrt{2} \text{ y } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

Por lo tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

2 Escribir $z = -2 + 2i$ en su forma trigonométrica.

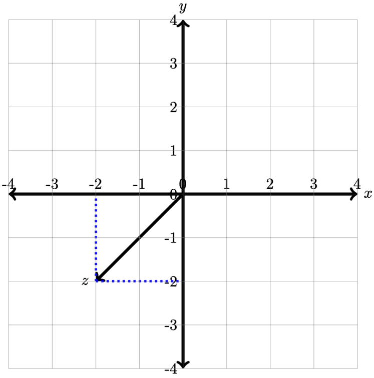


$r = 2\sqrt{2}$ y

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-2}{2\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4} = 135°$. Por lo tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

3 Escribir $z = -2 - 2i$ en forma polar



$r = 2\sqrt{2}$. Como z pertenece al tercer cuadrante entonces su argumento es un ángulo entre 180° y 270°. Además $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2}{-2}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{5\pi}{4} = 225°$ Por lo tanto,

$$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

1 Exprese en forma polar o trigonométrica con argumentos entre $0°$ y $360°$, los siguientes números complejos:

a) $z = 3 + 3\sqrt{3}i$

b) $z = 7 - 7i$

c) $z = i$

d) $z = 4\sqrt{3} - 4i$

e) $z = 2\sqrt{3} - 2i$

f) $z = -7$

Operatoria de números complejos en su forma polar

Las operaciones multiplicación y división de números complejos tienen su expresión en forma polar o trinonométrica:

$$\text{Si } z = |z|e^{i\theta} \text{ y } u = |u|e^{i\mu} \text{ entonces}$$

$$z \cdot u = |z| \cdot |u| \cdot e^{i(\theta+\mu)} \text{ y } \frac{z}{u} = \frac{|z|}{|u|} \cdot e^{i(\theta-\mu)}$$

Ejercicios: Dados los complejos $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, calcular

$$(z_1)^2, (z_2)^3 \text{ , } z_1 \cdot z_2 \text{ y } z_1 : z_2$$

Potencias de números complejos

Sea $z = |z|e^{i\theta}$ un número complejo expresando en forma polar. Calculemos z^2 y z^3.

$$z^2 = (|z|e^{i\theta})(|z|e^{i\theta}) = |z|^2 e^{i2\theta}$$

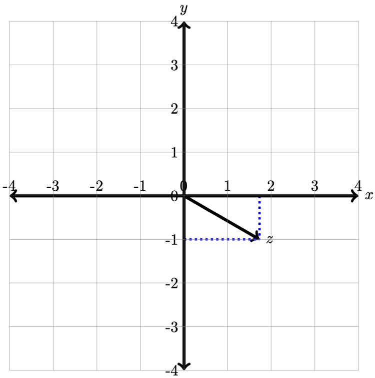
$$z^3 = z^2 \cdot z = (|z|^2 e^{i2\theta})(|z|e^{i\theta}) = |z|^3 e^{i3\theta}$$

Utilizando un razonamiento inductivo se demuestra el siguiente resultado:

Teorema (Fórmula de De Moivre): Sea $z = |z|e^{i\theta}$ un número complejo y $n \in \mathbb{N}$; entonces

$$z^n = |z|^n e^{in\cdot\theta}$$

1. Sea $z = \sqrt{3} - i$. Calcular z^6



$|z| = 2$ y como $z \in$ Q IV entonces su argumento es un ángulo entre $270°$ y $360°$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \\
&= -30^\circ \\
&= 330^\circ \\
&= \frac{11}{6}\pi
\end{aligned}$$

Por lo que $z = 2e^{i\frac{11\pi}{6}}$ entonces

$$\begin{aligned}
z = 2 \cdot e^{i\frac{11\pi}{6}} &\implies z^6 = 2^6 e^{i11\pi} \\
&\implies z^6 = 2^6 e^{i\pi} \\
&\implies z^6 = 2^6\left(\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)\right) \\
&\implies z^6 = -2^6
\end{aligned}$$

2 Sea $\omega = -8 + 8\sqrt{3}i$. Calcular ω^3.

$|\omega| = 16$ y como $\omega \in$ Q II entonces su argumento es un ángulo entre $90°$ y $180°$, en efecto:

$$
\begin{aligned}
\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{-8\sqrt{3}}{8}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) \\
&= 120^\circ \\
&= \frac{2}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Por lo que $\omega = 16 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\omega = 16 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad &\Longrightarrow \quad \omega^3 = 16^3 \cdot e^{2\pi i} \\
&\Longrightarrow \quad \omega^3 = 16^3 \left(\cos(2\pi) + i\text{sen}(2\pi)\right) \\
&\Longrightarrow \quad \omega^3 = 16^3.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

1. Calcular z^7 y ω^4 si es que $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$ y $\omega = -1 + i$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, demuestre que
$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{1+\frac{1}{n}} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Pruebe que

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{13}-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{13}=i\frac{2^{14}\cdot\sqrt{13}^{13}}{3^{13}}\operatorname{sen}(30^\circ)$$

Solución: Sean $\omega=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ y $\vartheta=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ cuyas representaciones trigonométricas son

$$\omega=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos(30^\circ)+i\operatorname{sen}(30^\circ)\right) \text{ y } \vartheta=\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos(-30^\circ)+i\operatorname{sen}(-30^\circ)\right)$$

Por la fórmula de De Moivre se tiene que la décimatercera potencia de ambos complejos son:

$$\begin{aligned}\omega^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos(390^\circ)+i\operatorname{sen}(390^\circ)\right)\\ \vartheta^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13}\left(\cos(-390^\circ)+i\operatorname{sen}(-390^\circ)\right)\end{aligned}$$

Pero como la función cos es par y la función sen es impar y además considerando que $390° = 30° + 360°$ entonces:

$$\begin{aligned}
\omega^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13} (\cos(30°) + i\mathrm{sen}(30°)) \\
\vartheta^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13} (\cos(30°) - i\mathrm{sen}(30°))
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\omega^{13} - \vartheta^{13} &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13} (\cos(30°) + i\mathrm{sen}(30°) - \cos(30°) + i\mathrm{sen}(30°)) \\
&= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^{13} \cdot 2 \cdot i \cdot \mathrm{sen}(30°) \\
&= i\frac{2^{14} \cdot \sqrt{13}^{13}}{3^{13}}\mathrm{sen}(30°)
\end{aligned}$$

Raíces n - ésimas de un número complejo

Sea $\omega \in \mathbb{C}$. La forma polar o trigonométrica de ω viene dada por

$$\omega = |\omega| \left(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)\right)$$

Recordar que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera no se alteran si el ángulo aumenta o disminuye en un múltiplo entero positivo de 2π. Vale decir:

$$\omega = |\omega| \left(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)\right) = |\omega| \left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\mathrm{sen}(\theta + 2k\pi)\right)$$

Extrayendo la raíz n - ésima a ambos miembros de la igualdad se obtiene, en virtud de la fórmula de De Moivre,

$$\omega^{\frac{1}{n}} = |\omega|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) + i\left(\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

Si hacemos $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ se obtienen las n raíces del número complejo ω.

Gráficamente estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia con centro el origen del plano cartesiano y de radio $r = |\omega|^{\frac{1}{n}}$.

Ejemplo: Calcular las cuatro raíces cuartas de $\omega = -8 + 8\sqrt{3}i$ y representarlas geométricamente.
La forma trigonométrica de ω es

$$\omega = 16\left(\cos(120^\circ) + i\text{sen}(120^\circ)\right)$$

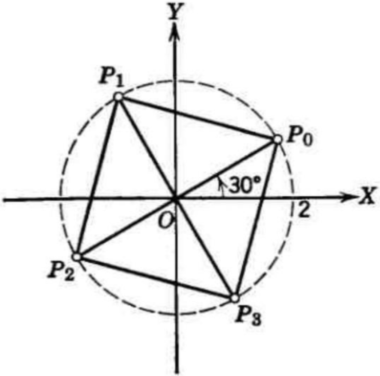
La raíces cuartas vienen dadas por

$$\omega^{\frac{1}{4}} = |\omega|^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}\right)\right) + i\left(\text{sen}\left(\frac{120^\circ + 360^\circ \cdot k}{4}\right)\right) \star$$

con $k = 0, 1, 2$ y 3. Reemplazando estos valores en $\star$ se obtienen las cuatro raíces pedidas:

$r_1 = 2\left(\cos(30^\circ) + i\mathrm{sen}(30^\circ)\right) = \sqrt{3} + i,$
$r_2 = 2\left(\cos(120^\circ) + i\mathrm{sen}(120^\circ)\right) = -1 + \sqrt{3}i,$
$r_3 = 2\left(\cos(210^\circ) + i\mathrm{sen}(210^\circ)\right) = -\sqrt{3} - i,$
$r_4 = 2\left(\cos(300^\circ) + i\mathrm{sen}(300^\circ)\right) = 1 - \sqrt{3}i,$

Geométricamente se tiene que las raíces son los cuatro vértices de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio $r = 2$. Los puntos P_0, P_1, P_2 y P_3 corresponden a las raíces , en donde los subíndices coinciden con los valores asignados a k.



Ejemplo: Resolver la ecuación compleja $\omega^3 + 1 - i = 0$.
Solución

$$\begin{aligned} \omega^3 + 1 - i = 0 &\iff \omega^3 = -1 + i \\ &\iff \omega = (-1+i)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Encontremos la forma trigonométrica del número complejo $z = -1 + i$. Como $z \in$ Q II entonces su argumento es un ángulo entre 90° y 180°. En efecto:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) \\ &= \tan^{-1}(-1) \\ &= 135^\circ \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 1-i &= |1-i|\,(\cos(135°)+i\text{sen}135°) \\ &= \sqrt{2}\,(\cos(135°)+i\text{sen}(135°)) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \omega &= (-1+i)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\sqrt{2}\,(\cos(135°)+i\text{sen}(135°))\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{135°+360°\cdot k}{3}\right)+i\text{sen}\left(\frac{135°+360°\cdot k}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $k = 0, 1$ y 2 se obtienen las tres raíces buscadas:

$$r_1 = 2^{\frac{1}{6}}\text{cis}(45°),\ r_2 = 2^{\frac{1}{6}}\text{cis}(165°) \text{ y } r_3 = 2^{\frac{1}{6}}\text{cis}(285°)$$