Álgebra II

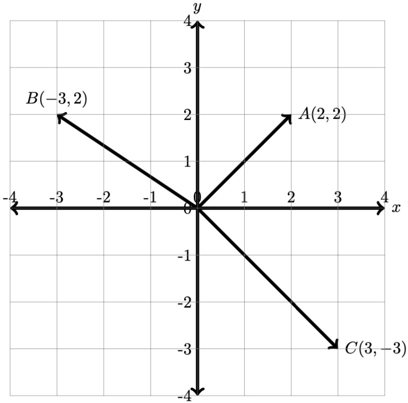
Felipe Fresno R.

Universidad
Alberto Hurtado

Elementos de geometría vectorial

Universidad
Alberto Hurtado

Un punto $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ determina un vector $\overrightarrow{OP}$ en el plano; O es el origen y P tiene coordenadas (a, b). Es costumbre escribir $P(a, b)$ para referirse a que P posee coordenadas rectangulares (a, b). En este caso se dice que $\overrightarrow{OP}$ es el **vector posición** del punto $P(a, b)$.



El conjunto de todos los puntos $P(a, b)$ del plano corresponden a todos los vectores cuyos orígenes están en $O(0, 0)$. Es usual representar dichos vectores usando coordenadas. Por ejemplo, en la figura se tiene que :

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OB} = [-3, 2] \ , \ \vec{v}_2 = \overrightarrow{OA} = [2, 2] \text{ y } \vec{v}_3 = \overrightarrow{OC} = [3, -3]$$

Dado un vector cualquiera del plano, digamos $v = [v_x, v_y]$, las coordenadas v_x y v_y son las componentes del vector. Es importante tener presente que el orden de las componentes es importante. No es lo mismo el vector $[v_x, v_y]$ que el $[v_y, v_x]$. Por lo que es común indicar que un vector es un par **ordenado** de números reales.

La **magnitud** , **norma** o **valor absoluto** del vector $v = [v_x, v_y]$ se denota como $\|v\|$ y se define de la siguiente manera

$$\|v\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Además, un vector del plano posee una dirección, la que viene dada por:

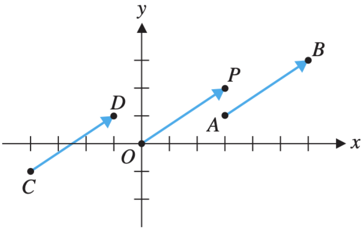
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Un vector que no se puede dibujar es el vector cero o nulo:

$$\overrightarrow{O} = [0, 0]$$

El conjunto de todos los vectores con dos componentes se denota $\mathbb{R}^2$, por ejemplo $[1, -2]$, $\left[\frac{1}{2}, 7\right]$, $[\sqrt{3}, e]$, $[1.5, \pi]$ son vectores de $\mathbb{R}^2$.

Considere el siguiente esquema



El vector $[3,2]$ puede interpretarse como sigue: a partir del origen $O(0,0)$ trasladarse 3 unidades a la derecha y luego 2 hacia arriba. El mismo desplazamiento puede aplicarse con los otros dos puntos iniciales C y A, obteniendo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

Dos vectores son **iguales** si y sólo si tienen misma longitud y misma dirección. Por lo que los tres vectores de la figura son iguales, aún cuando tengan diferentes puntos iniciales y terminales.

Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ son dos puntos del plano, entonces el vector $\overrightarrow{AB}$ se obtiene del siguiente modo:

$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2]$$

Así, en la figura anterior se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = [6-3, 3-1] = [3,2] \quad \text{y} \quad \overrightarrow{CD} = [-1-(-4), 1-(-1)] = [3,2]$$

Luego, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Otro ejemplo es el siguiente: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ con $A(0,0)$ y $B(3,2)$ es igual al vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ}$ con $P(1,2)$ y $Q(4,4)$. ya que ambos poseen misma longitud y misma dirección. ¡Verificar este hecho!

Además, el vector dado por $\overrightarrow{v} = [a, b]$ puede escribirse como:

$$\overrightarrow{v} = [a, 0] + [0, b] = a\widehat{i} + b\widehat{j}$$

donde $\widehat{i}$ y $\widehat{j}$ son los vectores unitarios $\widehat{i} = [1, 0]$ y $\widehat{j} = [0, 1]$.

Se dice que el vector $\overrightarrow{v} = [a, b]$ es **combinación lineal** de los vectores $\widehat{i}$ y $\widehat{j}$

Por ejemplo, $\overrightarrow{v} = [-2, 5] = -2[1, 0] + 5[0, 1] = -2\widehat{i} + 5\widehat{j}$

Operaciones con vectores

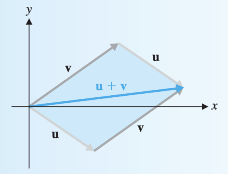
1 **Suma de vectores:** Sean $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y]$ y $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ entonces

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} = [v_x + u_x, v_y + u_y]$$

Por ejemplo, si $\overrightarrow{v} = [1, -4]$ y $\overrightarrow{u} = [-2, 5]$ entonces

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} &= [1, -4] + [-2, 5] \\ &= [1 + (-2), -4 + 5] \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

Geométricamente, el vector suma de dos vectores es la diagonal del paralelógramo que se forma con ambos vectores.



2 **Diferencia de vectores:** Sean $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y]$ y $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y]$ entonces

$$\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} = [v_x + (-u_x), v_y + (-u_y)]$$

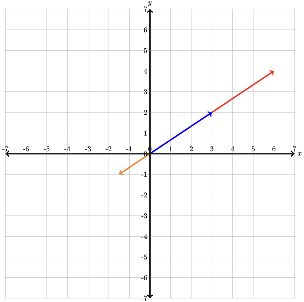
Por ejemplo, si $\overrightarrow{v} = \left[\frac{1}{4}, 2\right]$ y $\overrightarrow{u} = \left[-\frac{3}{4}, 5\right]$ entonces :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} &= \left[\frac{1}{4}, 2\right] - \left[-\frac{3}{4}, 5\right] \\
&= \left[\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right), 2 + (-5)\right] \\
&= \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{4}, 2 - 5\right] \\
&= \left[-\frac{1}{2}, -3\right]
\end{aligned}$$

3 **Ponderación por escalar:** Sean $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y]$ un vector y $k \in \mathbb{R}$ un escalar, entonces

$$k \cdot \overrightarrow{v} = k \cdot [v_x, v_y] = [k \cdot v_x, k \cdot v_y]$$

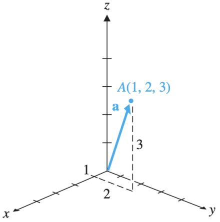
Por ejemplo, si $\overrightarrow{v} = [3, 2]$ entonces $2 \cdot \overrightarrow{v} = 2 \cdot [3, 2] = [6, 4]$ y $-\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{v} = -\frac{1}{2} \cdot [3, 2] = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$. Geométricamente se tiene le siguiente representación:



Vectores en $\mathbb{R}^3$

El espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ corresponde al conjunto de todos los trios ordenados de la forma (x, y, z) donde x,y y z son las componentes reales del punto en cuestión.

Tanto los puntos del espacio como los vectores se ubican usando tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares que convergen en un punto común denominado origen $O(0, 0, 0)$.
En la figura se observa el vector $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA} = [1, 2, 3]$



Operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$

Las operaciones suma , diferencia y ponderación por escalar se realizan de manera análoga a $\mathbb{R}^2$. Es decir, si $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ y $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y k es un escalar, entonces:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = [u_x + v_x, u_y + v_y, u_z + u_z]$
2. $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = [u_x - v_x, u_y - v_y, u_z - u_z]$
3. $k \cdot \overrightarrow{u} = [k \cdot u_x, k \cdot u_y, k \cdot u_z]$

Ejercicios

1. Si $\overrightarrow{v} = [4, 2, 1]$ y $\overrightarrow{u} = [-2, 5, 3]$, determine los vectores $2 \cdot \overrightarrow{v}$, $-1 \cdot \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$.
2. Encuentre el vector $\overrightarrow{PQ}$ si $P(3, 2, 1)$ y $Q(5, 7, 0)$.
3. Determine el punto final del vector $\overrightarrow{AB} = 4\widehat{i} + 8\widehat{j} - \widehat{k}$ si $A(-3, 10, 2)$.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ se define como el conjunto de todas las n - tuplas ordenadas de números reales con $n \in \mathbb{N}$ escritos como vectores fila o columna. Es decir, si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n] \text{ o } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

donde v_i corresponde a la i - ésima componente o entrada del vector $\overrightarrow{v}$.

La forma de sumar, restar vectores y la ponderación por escalar es similar al caso de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se suma y resta componente a componente y la ponderación por escalar amplifica cada entrada del vector en un factor k con k un número real.

$$\text{Si } \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ y } \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \text{ entonces: } \overrightarrow{v} \pm \overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} v_1 \pm u_1 \\ v_2 \pm u_2 \\ \vdots \\ v_i \pm u_i \\ \vdots \\ v_n \pm u_n \end{bmatrix}$$

Propiedades algebraicas de los vectores en $\mathbb{R}^n$

Sean $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y k_1, k_2 constantes reales.

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$
4. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$
5. $k_1 \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k_1 \cdot \overrightarrow{u} + k_1 \cdot \overrightarrow{v}$
6. $(k_1 + k_2)\overrightarrow{u} = k_1 \cdot \overrightarrow{u} + k_2 \cdot \overrightarrow{u}$
7. $(k_1 \cdot k_2)\overrightarrow{u} = k_1 \cdot (k_2 \overrightarrow{u})$
8. $1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

Vector unitario

Se llama **vector unitario** al vector cuyo valor absoluto o norma es igual a la unidad. Ejemplos clásicos de vectores unitarios son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$: $\widehat{i}$,$\widehat{j}$ y $\widehat{k}$, en efecto:

$\|\widehat{i}\| = \|[1,0,0]\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$, $\|\widehat{j}\| = \|[0,1,0]\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$ y $\|\widehat{k}\| = \|[0,0,1]\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1$

Verificar que los siguientes vectores son unitarios

1. $\overrightarrow{u} = \left[\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right]$
2. $\overrightarrow{u} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
3. $\overrightarrow{v} = \frac{2}{\sqrt{6}}\widehat{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\widehat{j}$
4. $\overrightarrow{v} = \frac{2}{\sqrt{13}}\widehat{i} - \frac{3}{\sqrt{3}}\widehat{j}$

Ejemplo: Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ para que el vector $\vec{u} = \left[\frac{3}{4}, 2m\right]$ sea unitario.

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| = 1 \quad & \iff \quad \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + (2m)^2} = 1 \\
& \iff \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 + (2m)^2 = 1 \\
& \iff \quad \frac{9}{16} + 4m^2 = 1 \\
& \iff \quad m^2 = \frac{7}{64} \\
& \iff \quad m = \pm\frac{\sqrt{7}}{8}
\end{aligned}
$$

Normalización de un vector

Se llama normalizar un vector $\overrightarrow{u}$ al procedimiento de conseguir otro vector $\widehat{u}$ con la misma dirección y sentido que el vector original pero de **magnitud, módulo, norma o valor absoluto igual a la unidad**. Para esto basta multiplicar el vector dado por el factor $k = \dfrac{1}{\|u\|}$. El vector resultante será unitario.

Sea $\overrightarrow{u} = [3, 4]$, su norma es igual a $\|u\| = 5$, por lo tanto el vector $\widehat{u} = \left[\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right]$ es unitario.

Ejercicio:

1. Normalice el vector $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\widehat{i} - \dfrac{3}{4}\widehat{j}$
2. Si $\overrightarrow{u} = [3, 5, 1]$ y $\overrightarrow{v} = [6, -2, 2]$, normalice el vector $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$

Producto punto

Sean $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ y $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Se llama producto punto entre los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ al escalar que se obtiene de la siguiente forma

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Por ejemplo, si $\overrightarrow{u} = [1, -4, 2]$ y $\overrightarrow{v} = [2, 1, -3]$ entonces:

$$\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = (1)(2) + (-4)(1) + (2)(-3) = -8$$

El producto punto o producto escalar nos permite calcular:

1. Longitud o norma de los vectores:
$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2}$$
2. Distancia entre vectores: $d(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|$

3. El ángulo más pequeño entre dos vectores:
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\|u\|\|v\|}\right)$$

Tener presente que:

1. Dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos si están contenidos en la misma recta que pasa por el origen. Luego, si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son paralelos entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$
2. Dos vectores se dicen ortogonales o perpendiculares si y sólo si su producto punto es cero, es decir:

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \Longleftrightarrow \theta = 90^\circ$$

a) Obtenga el ángulo entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ si es que $\overrightarrow{u} = [3, 0, 0]$ y $\overrightarrow{v} = [5, 5, 0]$

b) Calcule el valor de k de modo que el ángulo entre $\overrightarrow{u} = [1, k, 1]$ y $\overrightarrow{v} = [1, 1, 0]$ sea $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

c) Probar que $\overrightarrow{u} = [-y, x]$ y $\overrightarrow{v} = [y, -x]$ son perpendiculares con el vector $\overrightarrow{w} = [x, y]$

Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que los vectores

$$\overrightarrow{u} = (m, 5) \text{ y } \overrightarrow{v} = 4\widehat{i} - (1-m)\widehat{j}$$

sean ortogonales.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (m)(4) + (5)(-(1-m)) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 4m - 5 + 5m = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad m = \frac{5}{9}
\end{aligned}$$

Por lo que $\overrightarrow{u}$ es perpendicular con $\overrightarrow{v}$ si y sólo si $m = -5$

Ejercicios

1. Determine todos los valores reales de k de modo que los vectores $\overrightarrow{u} = [k^2, 2, k]$ y $\overrightarrow{w} = [k, 3, -7]$ sean ortogonales. Ayuda: $k^3 - 7k + 6 = (k-1)(k^2 + k - 6)$.
2. ¿Para qué valores del número real k los vectores $\overrightarrow{u} = [k, 1, 2, k]$ y $\overrightarrow{v} = [4, 3k, k+10, k]$ son ortogonales?

Propiedades de la norma de un vector

Es posible demostrar las siguiente propiedades relativa a la norma de vectores en $\mathbb{R}^n$.

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$ para todo $\overrightarrow{v}$.
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
3. $\|\alpha \cdot \overrightarrow{v}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{v}\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{u}\|$

No es difícil demostrar las primeras tres afirmaciones. La demostración de la última, es consecuencia de otro teorema conocido como la **Desigualdad de Cauchy-Schwartz:**

$$|\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}| \leq \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|$$

Propiedades del producto punto

Sea $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$
2. $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$
3. $(k\overrightarrow{u}) \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \bullet (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v})$
4. $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 > 0$ y $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

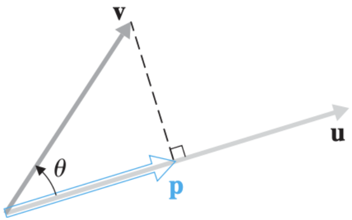
Ejercicio: Dados los vectores $\overrightarrow{u} = [3, 2, -1]$, $\overrightarrow{v} = [-1, 5, 2]$ y $\overrightarrow{w} = 6\widehat{i} - 3\widehat{j} + \widehat{k}$, calcular $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \bullet \overrightarrow{w}$.

Proyecciones

Sean $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, entonces la proyección del vector $\overrightarrow{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{u}$ es el vector $\mathbf{proy}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})$ definido por

$$\mathbf{proy}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \left(\frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u}$$

Geométricamente se tiene la siguiente representación



Donde $\overrightarrow{p} = \mathbf{proy}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})$.

Ejercicio: Sean $\overrightarrow{u} = [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0]$ y $\overrightarrow{v} = [4, -\sqrt{2}, 0, -5]$ vectores de $\mathbb{R}^4$. Encuente la proyección de $\overrightarrow{v}$ sobre el vector $\overrightarrow{u}$.
Solución:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{proy}_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) &= \left(\frac{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{u}}\right)\overrightarrow{u} \\
&= \left(\frac{[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0] \bullet [4, -\sqrt{2}, 0, -5]}{[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0] \bullet [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0]}\right)[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0] \\
&= \left(\frac{2}{6}\right)[1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0] \\
&= \left[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right]
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Obtener el valor de $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|$ sabiendo que $\|\overrightarrow{u}\|=2$, $\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{3}$, y que $\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}=1$.
Solución: Recordar que si $\overrightarrow{\omega}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$ entonces se tiene que:

$$\|\overrightarrow{\omega}\|=\sqrt{\overrightarrow{\omega}\bullet\overrightarrow{\omega}} \iff \|\overrightarrow{\omega}\|^2=\overrightarrow{\omega}\bullet\overrightarrow{\omega}$$

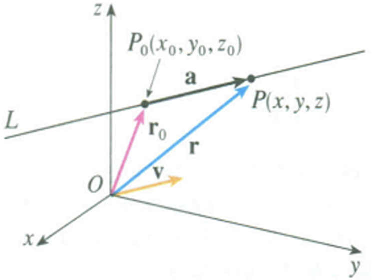
Luego,

$$\begin{array}{rcl}
\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 & = & (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\bullet(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) \\
& = & \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} \\
& = & \overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\bullet\overrightarrow{v} \\
& = & \|\overrightarrow{u}\|^2+2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{v}+\|\overrightarrow{v}\|^2 \\
& = & 2^2+2\cdot 1+\sqrt{3}^2 \\
& = & 9
\end{array}$$

Por lo que $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|=\sqrt{9}=3$.

Rectas

Recordar que si $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, estos son paralelos si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = t \cdot \overrightarrow{v}$. Teniendo presente este hecho, será posble describir rectas en el plano y en el espacio. Tales como la recta L que se muestra a continuación:



Una recta en el espacio se determina mediante un punto fijo $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y un vector fijo $\overrightarrow{v} = [a, b, c]$ llamado ***vector director*** de la recta. Un punto $P(x, y, z)$ está en la recta que pasa por el punto P_o y que tiene vector director $\overrightarrow{v}$ si :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_oP} \parallel \overrightarrow{v} \quad & \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{P_oP} = t \cdot \overrightarrow{v}, \quad \text{algún} \quad t \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow \quad [x - x_o, y - y_o, z - z_o] = t \cdot [a, b, c] \end{aligned}$$

Esta última igualdad se satisface si y sólo si

$$\begin{aligned} x &= x_o + at \\ y &= y_o + bt \quad (*) \\ z &= z_o + ct \end{aligned}$$

Las ecuaciones $(*)$ son las ***ecuaciones paramétricas*** de la recta L. Reciben tal nombre ya que dependen del parámetro real t.

Por otro lado, en la figura anterior, si denotamos por r y r_o a los vectores posición de los puntos P y P_o respectivamente, entonces se tiene que:

$$\overrightarrow{P_oP} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_o}$$

Pero $\overrightarrow{P_oP} = t \cdot \overrightarrow{v}$, luego reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$t \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_o} \iff \overrightarrow{r} = t \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{r_o} \quad \circledast$$

$\circledast$ se conoce como ***ecuación vectorial*** de la recta $.L$

Si el vector director $\vec{v}$ es distinto al vector nulo, entonces al despejar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas de la recta, se obtiene:

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Estas ecuaciones son conocidas como ***ecuaciones simétricas*** o ***continuas de la recta*** L.

Ejemplo: Encuentre las distintas formas de expresar la recta L que pasa por el punto $A(-1, 1, 3)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = [3, -2, 1]$ y determine dos puntos que pertenezcan a la recta encontrada.

Solución:

1. ***Ecuación vectorial:***

$$L : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_o} + t \cdot \overrightarrow{v} \quad \Longrightarrow \quad L : [x, y, z] = [-1, 1, 3] + t \cdot [3, -2, 1]$$

2. ***Ecuación paramétrica:*** De la ecuación vectorial se obtiene:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ L : y &= 1 - 2t \\ z &= 3 + t \end{aligned}$$

3 ***Ecuación simétrica o continua:*** Despejando el parámetro t obtenemos las ecuaciones paramétricas:

$$L : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

Finalmente, para determinar dos puntos que pertenezcan a la recta L, basta asignar valores reales al parámetro t en las ecuaciones paramétricas. Si $t = 1$ se obtiene el punto $A(2, -1, 4)$ y si $t = 2$ se obtiene el punto $B(5, -3, 5)$.

Ejemplo: Determinar ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(-4, 1, 3)$ y $B(-1, 5, 2)$.
Solución: Si conocemos los puntos A y B de la recta, entonces el vector director será

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{AB} \\ &= [-1-(-4), 5-1, 2-3] \\ &= [3, 4, -1] \end{aligned}$$

Luego, si escogemos como el punto A aquel que está sobre la recta cuya ecuación es la buscada, se tiene que:

$$L : [x, y, z] = [-4, 1, 3] + t \cdot [3, 4, -1] \ (\textbf{\textit{ecuación vectorial}})$$

A partir de la ecuación vectorial se obtienen las ***ecuaciones paramétricas***:

$$\begin{aligned} x &= -4 + 3t \\ y &= 1 + 4t \\ z &= 3 - t \end{aligned}$$

Finalmente, al despejar el parámetro t de cada una de estas ecuaciones, se obtienen las ***ecuaciones simétricas o continuas***:

$$L : \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

Determine si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.
"Las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, donde

$$\boldsymbol{L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}}$$

y

$$\boldsymbol{L_2 : x = 2 - 3t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t}\text{"}$$

Solución: Dos rectas son perpendiculares si el ángulo entre sus vectores directores es 90°. Si $\overrightarrow{d_1}$ y $\overrightarrow{d_2}$ son los vectores directores de $\boldsymbol{L_1}$ y $\boldsymbol{L_2}$ respectivamente, entonces:

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{d_2} \bullet \overrightarrow{d_2} = 0$$

De las ecuaciones de ambas rectas es posible determinar el vector director de cada una, en el primer caso este corresponde al vector $\overrightarrow{d_1} = [2, -3, 4]$ mientras que en la segunda es el vector $\overrightarrow{d_2} = [-3, 2, 3]$. Luego:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2} &= [2, -3, 4] \bullet [-3, 2, 3] \\ &= (2)(-3) + (-3)(2) + (4)(3) \\ &= -6 - 6 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{d_1} \bullet \overrightarrow{d_2} = 0$ entonces los vectores directores son perpendiculares y por lo tanto las rectas L_1 y L_2 también lo son. Luego, la afirmación es ***verdadera***.

Ejemplo: Determine la intersección de las rectas L_1 de ecuaciones $x = 1 + t, y = 2t, z = 1 + 3t$ y L_2 de ecuaciones $x = 3s, y = 2s$ y $z = 2 + s$.
***Solución*:** Igualando componente a componente se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 + t &= 3s && (1) \\ 2t &= 2s && (2) \\ 1 + 3t &= 2 + s && (3) \end{aligned}$$

De la ecuación (2) se obtiene que $t = s$, reemplazando este valor de s en la ecuación (1) y despejando la variable t se obtiene que $t = s = \dfrac{1}{2}$. Finalmente se debe verificar si para este valor de t y s la ecuación (3) se satisface. Esto si ocurre ¡verificarlo!. Por lo que $L_1 \cap L_2 = \left\{ \left(\dfrac{3}{2}, 1, \dfrac{5}{2} \right) \right\}$.

Planos

La ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector paralelo a ella llamado ***vector director***. Se pueden derivar ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Tal vector se denomina ***vector normal*** al plano y se denota como $\overrightarrow{n}$.

***Definición*:** Sea $P(x_o, y_o, z_o)$ un punto en el espacio y $\overrightarrow{n}$ un vector normal no nulo, entonces el conjunto de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los que $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{n} = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$.

***Notación*:** Por lo general, un plano se denota por el símbolo π o $\mathcal{P}$.

Sea $P(x_o, y_o, z_o)$ un punto fijo del plano con vector normal $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$. Si $Q(x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = [x - x_o, y - y_o, z - z_o]$. Ahora bien, como $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular con el vector normal $\overrightarrow{n}$ se tiene que $\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{n} = 0$. Pero esto implica que

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

La ecuación anterior puede escribirse como

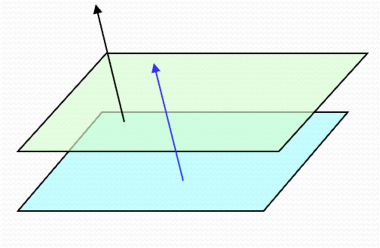
$$Ax + By + Cz - (ax_o + by_o + cz_o) = 0$$

Y dado que la expresión encerrada entre paréntesis es constante, puede ser reemplazada por el término constante $-D$, resultando la ***ecuación general, cartesiana*** o ***implícita*** del plano :

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

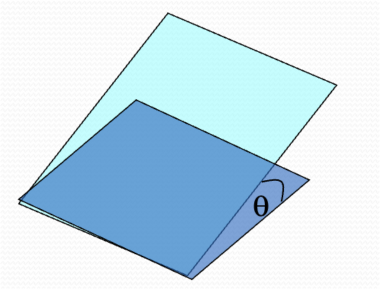
Dos planos en el espacio o son paralelos o se insertectan en una recta. Si π_1 y π_2 son planos con vectores normales $\overrightarrow{n}_1$ y $\overrightarrow{n}_2$ respectivamente, entonces:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow \overrightarrow{n}_1 \parallel \overrightarrow{n}_2$$



Si los planos se intersectan, el ángulo entre ellos es tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{n}_2}{\|\overrightarrow{n}_1\| \cdot \|\overrightarrow{n}_2\|}$$



Mientras que, lo planos π_1 y π_2 serán ***perpendiculares*** si y sólo si

$$\overrightarrow{n}_1 \bullet \overrightarrow{n}_2 = 0.$$

Determine el punto en el cuál la recta

$$L : t = \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2}, \, t \in \mathbb{R}$$

intersecta al plano $\pi : x + 2y + 2z = 22$.
Solución:
La ecuación simétrica o continua de la recta se escribe en su forma paramátrica: $x = t + 2, y = 2t - 3$ y $z = 2t + 4$ con $t \in \mathbb{R}$.

Sea $P(x_o, y_o, z_o)$ el punto buscado. Luego P debe satisfacer la ecuación de la recta y además la ecuación del plano, es decir, para cierto $t_o \in \mathbb{R}$ ocurre que

$$x_o = t_o + 2, y_o = 2t_o - 3, z_o = 2t_o + 4 \; (\star)$$

y

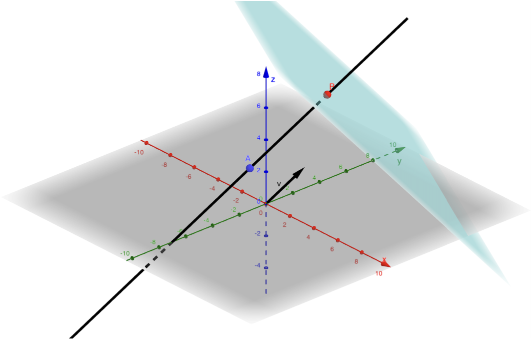
$$x_o + 2y_o + 2x_o = 22 \; (\star\star)$$

Reemplazando $(\star)$ en $(\star\star)$ se obtiene:

$$t_o + 2 + 2(2t_o - 3) + 2(2t_o + 4) = 22 \iff t_o = 2$$

Reemplazando $t_o = 2$ en $(\star)$ se obtiene el punto buscado

$$P(x_o, y_o, z_o) = (4, 1, 8).$$



Sean $\mathcal{P} : 3x - 5y + 2z - 7 = 0$ y $L : \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{4}$. Determine el punto de intersección entre el plano $\mathcal{P}$ y la recta L.

***Solución*:** Las ecuaciones paramétricas de L se obtienen igualando las expresiones de la ecuación simétrica a un parámetro k.

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{4} = k, k \in \mathbb{R}$$

Despejando x, y y z se obtiene: $x = 3 - k$, $y = 1 + k$ y $z = -2 + 4k$ con $k \in \mathbb{R}$. Reemplazando estos valores en la ecuación del plano $\mathcal{P}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} 3(3-k)-5(1+k)+2(-2+4k)-7 &= 0 \\ 9-3k-5-5k-4-8k-7 &= 0 \\ 9-3k-5-5k-4-8k &= 7 \\ 0 &= 7 \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción y significa que no existe valor de $k \in \mathbb{R}$ que permita obtener un punto común a L y $\mathcal{P}$. Por lo que concluimos que $L \parallel \mathcal{P}$ y la intersección es vacía.

Determine la ecuación vectorial del plano π que pasa por los puntos $A(10,-1,0), B(15,0,-1)$ y $C(12,-1,-1)$.

Solución: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ los vectores directores del plano buscado. Luego, $\overrightarrow{AB} = [5,1,-1]$ y $\overrightarrow{AC} = [2,0,-1]$. Así, la ecuación vectorial del plano viene dada por:

$$\pi : (x,y,z) = (10,-1,0) + \alpha(5,1,-1) + \beta(2,0,-1), \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Observación: Se podría haber elegido el punto B o C para formar la ecuación vectorial del plano. No importa cuál punto usar, ya que el requisito es que tal punto pertenezca al plano buscado.
Ejercicio: Comprobar que la ecuación cartesiana del plano anterior es igual a

$$\pi : x - 3y + 2z = 13.$$

Encuentre la ecuación vectorial de la recta que se genera al intersectar los planos

$$\mathcal{P}_1 : 3x + 2y + z = 9 \text{ y } \mathcal{P}_2 : 2x + 3y + 4z = 16$$

***Solución*:** Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = -z + 9 \\ 2x + 3y = -4z + 16 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -6x - 4y = 2z - 18 \\ 6x + 9y = -12z + 48 \end{array} \right. \quad (\star)$$

La clave es dejar expresadas dos de las incógnitas en función de la 3^{ra}. Sumando ambas ecuaciones de $(\star)$ se obtiene $5y = -10z + 30 \iff y = -2z + 6$.
Reemplazando este valor de y en la 1^{ra} ecuación del sistema original , se obtiene que $x = z - 1$.

Finalmente, sea $z = t$, por lo tanto la ecuación paramétrica de la recta L buscada es:

$$L : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -2t + 6 \\ z = t \end{cases}$$

Mientras que la ecuación vectorial viene dada por

$$L : (x, y, z) = (-1, 6, 1) + t \cdot (1, -2, 1), t \in \mathbb{R}$$