

Guía Matrices

1. Determine la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de orden 3 definidas como sigue:

a) $a_{ij} = 2i - j$ b) $a_{ij} = \min \{i, j\}$ c) $a_{ij} = \begin{cases} -3 & \text{si } i = j, \\ 2i & \text{si } i \neq j \end{cases}$

2. Sea $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se define la traza de $\mathbf{A}$, denotada como $\text{tr}(\mathbf{A})$, como la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

a) Determine la traza de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 5i - 3j$.

b) Determine la traza de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} -3 & \text{si } i = j, \\ 2i & \text{si } i \neq j \end{cases}$

3. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es la matriz de orden 3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j & \text{si } i + j < 4, \\ i + j & \text{si } i + j \geq 4 \end{cases}$. Demuestre que $\text{tr}(2\mathbf{A}^t + \mathbf{I}_3) = 1$.

4. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, determine $(2\mathbf{A} - \mathbf{B}^t)^t \mathbf{C}$ y la matriz $\mathbf{X}$ que satisface $2(\mathbf{AB} - \mathbf{X})^t = \mathbf{C}^2$.

5. Considere las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Determine:

a) los valores de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ de modo que $\begin{pmatrix} \mathbf{a} & 0 \\ -3 & \mathbf{b} \\ 0 & \mathbf{c} \end{pmatrix} = (\mathbf{BA})^t$

b) usando los valores de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ calculados anteriormente, obtenga la matriz $\mathbf{X}$ que satisface:

$$2 \left(\mathbf{AA}^t + \begin{pmatrix} 5-b & 2 \\ 5+a & c-4 \end{pmatrix} - \mathbf{X}^t \right) = 2\mathbf{BI}_2,$$

donde $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de orden 2.

6. Considere las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ para verificar que $\mathbf{B}^t \mathbf{AB}$ es simétrica. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica cualquiera y que $\mathbf{B}$ es una matriz antisimétrica tal que $\mathbf{B}^t \mathbf{AB}$ está definida, utilizando esta información, demostrar que $\mathbf{B}^t \mathbf{AB}$ es simétrica.

7. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matrices 3×3 tales que $a_{ij} = (-1)^i \min\{i, j\}$ y $b_{ij} = \begin{cases} 2i - j & \text{si } i < j, \\ i + -j & \text{si } i \geq j \end{cases}$. Obtener $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
8. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(\mathbb{R})$. Demuestre que:
- Si $\mathbf{A}$ es simétrica entonces $\mathbf{A}^2$ es simétrica.
 - $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ es simétrica.
 - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricas entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ también lo es.
 - Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricas entonces el producto entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es conmutativo, es decir $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
9. Determine los valores de α y β de modo que la matriz $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 1 \\ \alpha^2 & 0 & -4\alpha \\ \beta + 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ sea antisimétrica, luego calcule $\det(\mathbf{D})$.
10. Si $\det \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{pmatrix} \right) = -2$ demuestre que $\det \left(\begin{pmatrix} -2a & -b & -c \\ \alpha p + x & \alpha q + y & \alpha p + x \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \right)$ con α una constante es igual -8α .
11. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}$ es una matriz invertible de orden 3, encuentre $\det(\mathbf{X})$ si $2\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}$.
12. Utilizando operaciones elementales demuestre que el determinante de la matriz $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ es $\det(\mathbf{V}) = (b - a)(c - b)(c - a)$.
13. Sea $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Demuestre las siguientes propiedades:
- Si $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal, es decir $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$, entonces $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.
 - Si $\mathbf{A}$ es idempotente, es decir $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $\det(\mathbf{A}) = 0 \vee \det(\mathbf{A}) = 1$.
14. Determine los valores $m \in \mathbb{R}$ tales que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ m & m & m \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ tenga determinante igual a 0.
15. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n determine el valor de los siguientes determinantes en términos de $\det(\mathbf{A})$.
- $\det(3\mathbf{A})$
 - $\det(-\mathbf{A})$
 - $\det(\mathbf{A}^3)$
16. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{X} \in M_3(\mathbb{R})$ tales que $\mathbf{A} = |i - j|$ y $\mathbf{X}$ invertible.
- Determine la matriz $\mathbf{A}$
 - Encuentre $\det(\mathbf{A})$, ¿es $\mathbf{A}$ invertible?
 - Si $\mathbf{A}^t \mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$, encuentre los posibles valores para $\det(\mathbf{X})$