



**UNIVERSIDAD
ALBERTO HURTADO**

Facultad de Educación

Departamento de Pedagogía Media y Didácticas Específicas

Programa Pedagogía para Profesionales

Especialidad Matemática

**DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNA SECUENCIA DE CLASES PARA EL
APRENDIZAJE DE LAS ISOMETRÍAS EN EL PLANO CARTESIANO: UNA APLICACIÓN
INTEGRADA DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL MODELO DE VAN HIELE
EN UN OCTAVO BÁSICO**

Trabajo conducente al título de Profesor de Educación Media en Matemática

Por:

Carlos Alberto Figueroa Durán

Didacta: Dr (c). Nicolás Sánchez Acevedo

Santiago, Chile diciembre 2023



UNIVERSIDAD ALBERTO HURTADO

Diseño, implementación y evaluación de una secuencia de clases para el aprendizaje de las isometrías en el plano cartesiano: una aplicación integrada de la Teoría de Situaciones Didácticas y el Modelo de Van Hiele en un Octavo Básico

Autor: Carlos Alberto Figueroa Durán¹

Resumen:

El artículo aborda el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de clases enfocada en el aprendizaje de transformaciones isométricas en el plano cartesiano para estudiantes de octavo básico. Este trabajo, llevado a cabo en un colegio privado en Providencia, Santiago, tiene como objetivo principal el desarrollo de habilidades de pensamiento geométrico mediante situaciones didácticas, en línea con los objetivos de aprendizaje de los documentos curriculares pertinentes. La propuesta se fundamenta en referente pedagógicos y didácticos, integrando conocimientos previos con nuevos aprendizajes y fomentando un enfoque constructivista en la resolución de problemas. La evaluación de la secuencia de clases se realizó mediante la evaluación para el aprendizaje, ajustando las metodologías de enseñanza a las necesidades de los estudiantes y utilizando el modelo de Van Hiele para la evaluación formativa. Los resultados indican un avance en el razonamiento geométrico de los estudiantes, demostrado a través de evaluaciones formativas y sumativas. Además, se notó un incremento en la participación y el interés de los estudiantes, lo que sugiere un impacto positivo en su motivación hacia la materia. El artículo concluye con un análisis crítico de la implementación, identificando áreas de éxito, oportunidades de mejora y recomendaciones para la práctica docente futura, enfatizando la importancia de un enfoque centrado en el estudiante, el uso continuo de la evaluación formativa para guiar la enseñanza, y la integración de teorías pedagógicas contemporáneas para enriquecer el aprendizaje geométrico.

Palabras claves:

Transformaciones Isométricas, Pensamiento Geométrico, Aprendizaje Significativo, Teoría de Situaciones Didácticas, Modelo de Van Hiele.

¹ Ingeniero Civil Mecánico de la Pontificia Universidad Católica de Chile y estudiante del Programa Pedagogía para Profesionales de la Universidad Alberto Hurtado. Taller de Práctica Profesional y Taller de titulación, guiado por el Dr (c). Nicolás Sánchez Acevedo, 2023. Trabajo conducente al título de Profesor de Educación Media en Matemática y Licenciado en Educación.

Introducción

La geometría, reconocida como una disciplina central en matemáticas, desempeña un rol crucial en el desarrollo del pensamiento lógico y la resolución de problemas en estudiantes de Educación Media (Hollebrands, 2003; NCTM, 2000). Además, la geometría ofrece oportunidades para exponer a las y los estudiantes a una cultura matemática diversa y a diferentes formas de razonamiento (Alsina et al., 1997). El pensamiento geométrico proporciona un enfoque distintivo en comparación con otras áreas de la matemática, enfatizando aspectos que van más allá de lo teóricamente puro (Alsina et al., 1997; Aray Andrade et al., 2019; Goncalves, 2006; Jaime, 1993; Restrepo-Ochoa et al., 2023).

En Chile, la enseñanza de la geometría, y en particular de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, ha sido identificada como un área que requiere especial atención pedagógica. Se ha identificado que la enseñanza de la geometría en las escuelas chilenas representa un desafío particular, con una interacción didáctica entre profesores y estudiantes que a menudo se caracteriza por una baja exigencia cognitiva en la promoción del aprendizaje geométrico (Aravena y Caamaño, 2013; Villalta et al., 2011).

A pesar de la relevancia de la geometría, los métodos tradicionales de enseñanza han mostrado limitaciones para promover una comprensión profunda de estos conceptos (Aray Andrade et al., 2019; Goncalves, 2006). En este marco, el objetivo principal de este artículo es diseñar, implementar y evaluar una secuencia de clases centrada en el aprendizaje de las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, orientada a desarrollar habilidades de pensamiento geométrico mediante situaciones didácticas. Este trabajo se lleva a cabo en un octavo básico en un colegio privado de Providencia, Santiago, y está alineado con los objetivos de aprendizaje de los documentos curriculares para este nivel (Mineduc, 2015, 2016a).

Tras realizar un análisis diagnóstico en el octavo básico A, en el que se detectaron obstáculos pedagógicos y didácticos, se estableció como objetivo general el resolver problemas en distintos contextos que impliquen el uso de transformaciones isométricas y sus propiedades en figuras geométricas planas. Esta meta educativa se apoya en el principio del aprendizaje significativo, orientado a desarrollar nuevos contenidos educativos sobre la base del conocimiento previo de los estudiantes (Ausubel et al., 1978). Las clases se han diseñado para vincularse con la comprensión ya adquirida por los estudiantes y se fundamentan en la Teoría de Situaciones Didácticas, que guía tanto el diseño y desarrollo de las planificaciones y recursos educativos como su implementación práctica. Esta teoría se aplica con el fin de situar a los estudiantes en contextos que los desafían a construir conocimiento matemático de forma autónoma (Brousseau, 1986).

Para evaluar esta secuencia de clases, se empleará la evaluación para el aprendizaje como método para monitorear el progreso de los estudiantes y proporcionar retroalimentación formativa. Esta técnica permitirá ajustar las metodologías de enseñanza a las necesidades de aprendizaje del curso. Para evaluar tanto el logro de los indicadores de evaluación como las competencias y habilidades geométricas asociadas a las transformaciones isométricas tratadas en cada clase, se integrará el modelo de aprendizaje geométrico de Van Hiele (1957), con un enfoque en su dimensión descriptiva. Este modelo servirá como herramienta evaluativa, facilitando la evaluación formativa y contribuyendo a la identificación de los niveles de comprensión geométrica de los estudiantes.

Al concluir este artículo, se presentará una sección dedicada a la reflexión y el análisis crítico del proceso de implementación de la secuencia de clases. Esta parte del artículo se enfocará en examinar las lecciones aprendidas, identificar las áreas de éxito y las oportunidades de mejora, y formular recomendaciones destinadas a mejorar las futuras prácticas docentes. Este análisis proporcionará una visión integral sobre la efectividad de las estrategias pedagógicas y didácticas utilizadas y su influencia en el aprendizaje de los estudiantes, ofreciendo una perspectiva valiosa para la optimización de la enseñanza de la geometría en el contexto educacional chileno.

Capítulo 1

Diagnóstico de la institución y del curso

1.1 Diagnóstico de la institución

La secuencia de clases se desarrolla en un colegio privado de orientación cristiana-católica, de carácter mixto y centrado en la persona, ubicado en Providencia, en el sector oriente de Santiago. Este colegio, fundado en 1950, ha enfocado su educación en la promoción de la lengua y cultura alemana en Chile. La ubicación del establecimiento se destaca por su alta calidad de vida, buena conectividad, amplias áreas verdes, y una activa escena comercial y cultural. El entorno del colegio permite una interacción activa entre la comunidad escolar y la sociedad civil. Según la Agencia de Calidad de la Educación (2022), el colegio se clasifica en una categoría socioeconómica alta.

La escuela, considerando su contexto sociodemográfico y estabilidad financiera, cuenta con una infraestructura extensa y moderna que se extiende sobre 8711.4 m². Esta infraestructura incluye cinco edificios de tres y cuatro pisos, los cuales albergan diversas instalaciones como aulas, laboratorios de ciencias, talleres de arte, música y tecnología, además de áreas de recreo y servicios auxiliares. La institución también dispone de espacios verdes y campos deportivos. Las aulas están equipadas de manera adecuada para facilitar el proceso de aprendizaje.

La institución educativa en cuestión imparte una educación basada en un enfoque científico-humanista que se extiende desde la etapa preescolar hasta la Enseñanza Media. Adicionalmente, más allá de los planes y programas establecidos por el Ministerio de Educación de Chile (Mineduc), el colegio integra el Programa Bilingüe del Diploma de Bachillerato Internacional en español y alemán para los estudiantes de los últimos tres años de enseñanza media, también conocido por sus siglas en inglés, IB. La comunidad estudiantil de la institución consta de 998 alumnos, distribuidos de la siguiente manera: 21% en preescolar, 56% en educación básica y 23% en enseñanza media. En términos generales, cada aula alberga un máximo de 25 estudiantes. De acuerdo con la Agencia de Calidad de la Educación (2022), el promedio del puntaje SIMCE para los últimos tres años para los estudiantes de cuarto y octavo de Enseñanza Básica y segundo año de Enseñanza Media ha sido de 303, 320 y 303 respectivamente, evidenciando una tendencia creciente. Además, en el año 2022, el colegio logró un promedio PAES de 756 puntos, lo que lo sitúa entre los 120 mejores colegios del país (DSSTM, 2022, p. 44).

La visión institucional de esta escuela se centra en el desarrollo de individuos íntegros, autónomos y felices. Con este fin, se esfuerza por proporcionar una educación de tolerancia cristiana católica en un ambiente familiar, enriquecido por la cultura alemana y guiado por la excelencia académica. Estos elementos – educación cristiana católica, ambiente familiar, cultura alemana, excelencia académica y sostenibilidad – son los pilares que definen su propuesta educativa y formativa. La misión de la escuela es educar a las y los estudiantes en aspectos intelectuales, sociales, éticos y afectivos, preparándolos para una vida con sentido de trascendencia y vocación de servicio. Para asegurar el logro de estos objetivos, el colegio cumple con los requisitos curriculares nacionales y alemanes para sus escuelas en el exterior, así como con estándares internacionales como el IB (DSSTM, 2021, pp. 11–13).

Consistente con la visión institucional del colegio, la cultura escolar de este establecimiento se fundamenta en principios de la tradición alemana, poniendo énfasis en el idioma alemán y en conceptos como el *lenrzeit* o tiempo de aprendizaje, que promueve el trabajo autónomo con diversos grados de asesoramiento. También resalta la importancia de la convivencia respetuosa y la empatía entre los estudiantes, valores que se fomentan mediante el diálogo y la búsqueda de consensos. Se emplean métodos como los papelógrafos con protocolos destinados a fomentar la buena convivencia y a prevenir el acoso escolar, además de implementar acciones correctivas. Como ejemplo de esto, durante el primer día de clases, el profesor jefe impulsó la creación de un compromiso de buen comportamiento en el aula, en el que los estudiantes participaron en su formulación y lo firmaron junto a sus padres y el profesor jefe.

El enfoque pedagógico de la escuela para la enseñanza de las matemáticas se orienta hacia el fomento del pensamiento crítico y la resolución de problemas mediante el razonamiento matemático y el aprendizaje colaborativo. El objetivo es incentivar la reflexión y la autonomía en un entorno seguro para los estudiantes, en que los errores son percibidos como oportunidades de aprendizaje. Se llevan a cabo actividades que valoran la diversidad del grupo y se declara ofrecer retroalimentación constante, con el propósito de ayudar a los estudiantes a identificar y fortalecer sus áreas de mejora (ver Anexo D.1).

Desde la perspectiva de la jefa del Departamento de Matemáticas², una de las fortalezas de los procesos educativos del colegio reside en la presencia de un equipo de docentes sólido y coordinado, respaldado por un ambiente laboral que propicia el trabajo, junto a la disciplina exhibida por los estudiantes. Además, se observa que muchos de estos estudiantes, hijos de profesionales con títulos universitarios, aportan un capital cultural significativo. Sin embargo, la cultura de éxito fomentada en el hogar puede ejercer una presión sobre las calificaciones, lo que en ocasiones deriva en estrés y desmotivación en los estudiantes, especialmente cuando la formación no está centrada en la evaluación.

Por otro lado, las obligaciones y exigencias que enfrenta el colegio para cumplir con los requisitos curriculares nacionales y alemanes para sus escuelas en el exterior, así como con estándares internacionales como el IB se traducen en presiones en todos los estamentos de la institución. Esto se manifiesta especialmente en el cuerpo docente, que debe abordar grandes volúmenes de contenido y diseñar experiencias de enseñanza-aprendizaje en periodos limitados, manteniendo al mismo tiempo los estándares de excelencia educativa tanto docente como académica de los estudiantes. En la práctica, los profesores encuentran dificultades para proporcionar una retroalimentación constante y efectiva debido a estas limitaciones de tiempo.

En síntesis, este colegio implementa un enfoque pedagógico en matemáticas orientado al desarrollo del pensamiento crítico y la resolución de problemas a través del razonamiento matemático y el aprendizaje colaborativo. Dicha metodología busca fomentar la autonomía y la reflexión, considerando la diversidad del grupo y ofreciendo retroalimentación continua para el fortalecimiento de competencias. A pesar de contar con un equipo docente sólido y disciplinado, el colegio enfrenta desafíos en la gestión efectiva del tiempo y la planificación docente. Estos desafíos incluyen equilibrar el cumplimiento de todas las exigencias curriculares, mantener su excelencia académica y reputación, y crear experiencias y evaluaciones de aprendizaje que promuevan una retroalimentación constante y efectiva. Además, la presión por el éxito académico tanto en el hogar como en el colegio puede generar estrés y desmotivación entre los estudiantes, representando un reto adicional para la institución en su misión de formar individuos íntegros, autónomos y felices.

1.2 Diagnóstico del curso

El curso octavo básico A (8°A), uno de los tres cursos de este nivel, está compuesto por una diversidad de estudiantes que se hallan en una fase crítica de su desarrollo cognitivo y emocional. De acuerdo con la Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, estos estudiantes se sitúan en la etapa de las operaciones formales, lo que indica que deben poseer la capacidad de razonar de manera abstracta y lógica (Arancibia et al., 2010). El aula alberga a 21 estudiantes, 15 de los cuales son mujeres y seis son hombres. Si bien la mayoría de los estudiantes son de origen chileno, la clase también cuenta con una rica diversidad cultural, en que tres estudiantes poseen ascendencia alemana, uno ascendencia peruana y uno es de origen árabe. Los estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 13 y 14 años, muestran un grado de madurez considerablemente diverso, lo que se manifiesta en su proceso de formación de identidad.

Las formas en que los estudiantes interactúan son variadas. Mientras que algunos estudiantes tienden a aislarse en las actividades grupales, otros muestran un alto nivel de participación. Existen individuos que

² Transcripción de la entrevista a la jefa del departamento de matemática, en Anexo D.1.

emergen como líderes dentro del grupo y parecen ejercer una influencia considerable en el clima del aula. Tal liderazgo puede ser un recurso invaluable para el aprendizaje cooperativo y la resolución de problemas. El grupo parece beneficiarse de un enfoque que promueva la resolución autónoma de conflictos, lo que puede ayudar a desarrollar habilidades de cooperación y gestión de dificultades (ver Anexo D.2).

A lo largo de una serie de entrevistas³, el profesor de matemáticas, quien también es el profesor jefe del curso, proporcionó un panorama detallado tanto de su metodología pedagógica-didáctica y evaluativo como de los desafíos que identifica en el aprendizaje de sus estudiantes. El docente destaca la relevancia de establecer una relación eficiente y de igual a igual con los estudiantes, sugiriendo así un enfoque pedagógico con el estudiante en el centro. Este enfoque se fundamenta en la premisa de que, al construir un entorno de confianza y respeto mutuo, se facilita el aprendizaje y se fomenta la colaboración efectiva de los estudiantes (Fenstermacher y Soltis, 2007; Rogers y Freiberg, 1996). En esta línea, el profesor se esfuerza por generar un ambiente en el aula en el que los estudiantes se sientan respaldados y seguros, y en que sus ideas y aportaciones sean valoradas.

En relación con su enfoque didáctico, el docente adopta la Teoría de las situaciones didácticas, desarrollada por Guy Brousseau (1986). Esta teoría postula que el aprendizaje ocurre cuando los estudiantes se enfrentan a problemas que desafían su comprensión, motivándolos a buscar estrategias o conceptos innovadores para resolverlos (Brousseau, 2007). Basándose en este marco teórico, el educador se esfuerza por crear situaciones a-didácticas, destinadas a promover conflictos cognitivos y estimular tanto la resolución de problemas como la reflexión a través de la interacción activa con su entorno (Arancibia et al., 2008; Manterola, 2003; Panizza et al., 2009).

No obstante, el entorno académico del colegio, enfocado en resultados y marcado por la urgencia de los estudiantes de practicar y resolver ejercicios rápidamente para los controles o pruebas y así lograr buenas calificaciones, plantea un desafío. En este contexto, el docente se ve en la necesidad de hallar un equilibrio entre su enfoque constructivista basado en la Teoría de Brousseau y las exigencias conductistas del entorno educativo. Esto se traduce en la implementación de estrategias más tradicionales como el dictado y clases centradas en la ejercitación, en que el profesor se convierte en la figura central y los estudiantes buscan respuestas inmediatas y correctas (Villalta et al., 2011).

En lo que respecta a la evaluación, el docente sigue las directrices institucionales que enfatizan las evaluaciones sumativas. Estas se centran en medir el rendimiento de los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje preestablecidos (Ibarra-Sáiz y Rodríguez-Gómez, 2019; Sanmartí, 2007; Shepard, 2006). No obstante, el docente también procura incorporar la evaluación formativa, un enfoque que pone énfasis en el proceso de aprendizaje y que permite ofrecer retroalimentación continua sobre los errores y aciertos de los estudiantes (Ibarra-Sáiz y Rodríguez-Gómez, 2019; Shepard, 2006).

El docente ha identificado dos barreras pedagógicas que dificultan el aprendizaje de los estudiantes en el aula de matemáticas. La primera es la concepción arraigada y personal de los alumnos, que consideran que no son aptos para las matemáticas. Tal creencia puede estar influenciada por experiencias previas de dificultades con esta materia, generalmente vinculada a una retroalimentación docente punitiva respecto al error o por la percepción de que sus progenitores tampoco son hábiles en matemáticas (Shabab, 2023). La segunda barrera se relaciona con la falta de confianza de los estudiantes, un aspecto que pudo haberse intensificado a raíz de la pandemia y el consiguiente aislamiento (Gurung y Stone, 2020). Los estudiantes enfrentan retos para reconocer cuándo están avanzando adecuadamente y pueden albergar dudas sobre sus propias capacidades, lo cual podría tener un impacto en su progreso y en la comprensión de su aprendizaje (Gonzálvez et al., 2016; Martínez, 2020; Shabab, 2023).

Adicionalmente, el docente ha identificado obstáculos didáctico-disciplinares en el aprendizaje de la geometría, especialmente en lo que respecta a la comprensión de vectores y su representación en el plano

³ Transcripción de la entrevista al profesor jefe, en Anexo D.2.

cartesiano, más aún en su expresión algebraica con y sin soporte concreto. Dado que el docente asumió la responsabilidad de este curso en 7° básico durante el año 2022, el Objetivo de Aprendizaje 14 de ese nivel, relativo a la identificación de puntos en el plano cartesiano utilizando pares ordenados y al aprendizaje de los vectores de manera concreta y pictórica (Mineduc, 2016b), no fue abordado ya que no fue parte de la priorización curricular. Sin embargo, en el presente año se logró remediar parcialmente este aprendizaje descendido mediante la identificación de puntos en el plano cartesiano en el estudio de la función lineal.

Conforme al diagnóstico del docente y la evidencia recopilada tanto el año pasado como el presente, los estudiantes han demostrado capacidad para identificar propiedades mediante manipulación y establecer algunas relaciones entre familias de figuras, presentando evidencias de situarse en el nivel 2 de análisis y algunos indicadores del nivel 3 de clasificación según el modelo de Van Hiele (1957). No obstante, los estudiantes podrían enfrentar dificultades al abordar el contenido de transformaciones isométricas, especialmente en el establecimiento de las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir las figuras geométricas en una isometría y la formulación algebraica con y sin soporte concreto de una traslación, rotación y simetría en el plano cartesiano.

Capítulo 2

Referentes teóricos

El capítulo establece las bases teóricas para esta secuencia de clases. Incluye una revisión de la Teoría del aprendizaje significativo de David Ausubel (1978), que subraya la importancia de integrar conocimientos previos con nuevos aprendizajes, y la evaluación para el aprendizaje centrada en el proceso más que en los resultados. Además, incorpora la Teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau (1986), que enfatiza un aprendizaje constructivista a través de la resolución independiente de problemas, y el Modelo de razonamiento geométrico de los Van Hiele (Van Hiele, 1957; Van Hiele-Geldof, 1957), que detalla niveles secuenciales de razonamiento geométrico y proporciona un marco para evaluar y discernir la progresión del razonamiento geométrico en los estudiantes. Este capítulo es esencial para comprender los principios pedagógicos y didácticos que fundamentan la propuesta de enseñanza-aprendizaje de este artículo.

2.1 Referentes pedagógicos

La Teoría del aprendizaje significativo de Ausubel (1978) propone un marco teórico esencial para entender los procesos de adquisición de conocimiento, un aspecto fundamental para el diseño de la presente propuesta didáctica. Según Ausubel (2002), el aprendizaje significativo tiene lugar cuando

Se produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones (no es una simple asociación), de tal manera que éstas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial. (p. 25)

Moreira (1997) argumenta que el aprendizaje significativo es un proceso activo por parte del alumno. Este proceso implica que el estudiante debe realizar una serie de operaciones cognitivas sobre el material presentado para lograr un aprendizaje con significado profundo (p. 5). Moreira también subraya que “cuanto más significativo sea el aprendizaje, mayor será el interés del alumno por su contenido” (p. 8).

Esta dinámica no solo mejora la comprensión de la información, sino también su retención a largo plazo. El proceso de adquisición de conocimiento implica una interacción dinámica entre la nueva información que se aprende y una estructura de conocimiento preexistente en el aprendiz, tal como detallan Arancibia et al. (2008). Según estos autores, dicha estructura de conocimiento se denomina concepto integrador o *subsumer*. Por lo tanto, el aprendizaje significativo ocurre cuando la nueva información se vincula con conceptos integradores o proposiciones ya existentes en la estructura cognitiva del estudiante, un enfoque respaldado tanto por Arancibia et al. (2008) como por Ausubel (2002) y Moreira (1997).

Desde la perspectiva de Ausubel, el proceso de almacenamiento de información en el cerebro humano es una actividad altamente organizada, que forma una jerarquía conceptual. En esta jerarquía, los conocimientos más específicos se asocian con conceptos más generales e inclusivos, lo que Ausubel describe como el proceso de asimilación. Así, la estructura cognitiva se establece como una organización jerárquica de conceptos, construida a partir de las experiencias previas del individuo. Esta perspectiva, enfocada en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo, conduce a un concepto pedagógico clave: la evaluación para el aprendizaje (EpA).

La EpA prioriza el proceso de aprendizaje sobre el producto o los resultados finales, transformando la evaluación en una experiencia educativa en sí misma, tal como señala Moreno (2006). Este enfoque evaluativo proporciona a los estudiantes una retroalimentación constante acerca de sus errores y aciertos, una práctica respaldada por Ibarra-Sáiz y Rodríguez-Gómez (2019), Sanmartí (2007) y Shepard (2006). Además, este método de evaluación busca establecer una micro comunidad científica evaluativa, en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de aprender unos de otros mediante el intercambio de retroalimentación. Dicha estrategia está en consonancia con la Teoría de Ausubel, dado que ambos enfatizan la importancia de la reflexión y la autoevaluación dentro del proceso de aprendizaje, como destaca Zepeda (2017).

Dentro de este contexto, la voluntad del estudiante de activar y revisar sus esquemas de conocimiento es crucial para alcanzar un aprendizaje significativo, tal como sostienen Coll et al. (2014). En consecuencia, el docente tiene la responsabilidad de proporcionar una retroalimentación adecuada y enfocada en el aprendizaje. Para ello, es esencial emplear herramientas cognitivas como analogías, mapas conceptuales y organizadores previos, entre otras estrategias. Estas herramientas tienen como finalidad fomentar la reflexión y autoevaluación en los estudiantes, incentivando su participación, la comprensión profunda, la motivación intrínseca y la habilidad de aprender de manera autónoma a lo largo del proceso educativo. La retroalimentación brindada debe guiar a los estudiantes en la comprensión de sus procesos de aprendizaje, ayudándoles a identificar áreas de mejora y a reconocer sus propios logros.

Para ejemplificar el concepto de aprendizaje significativo, se introduce la Figura 1. Esta figura muestra un mapa conceptual que resalta las características fundamentales de este enfoque educativo.

Figura 1

Mapa conceptual resumen concepto de aprendizaje significativo



Nota. Reproducido en El concepto de aprendizaje significativo (basado en Ausubel, 1976; Novak y Gowin, 1988; Ontoria, 1993), de Díaz-Barriga y Hernández, 2004.

2.2 Referentes didácticos

2.2.1. Teoría de situaciones didácticas de Brousseau

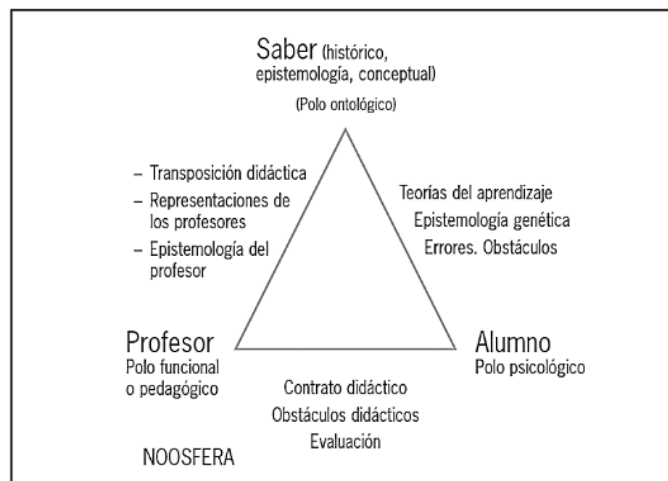
Como parte del diseño e implementación de la secuencia de clases, este trabajo se sustenta en la Teoría de las situaciones didácticas (TSD) propuesta por Brousseau (1986). Anclada en una visión constructivista del aprendizaje, esta teoría promueve la idea de que el aprendizaje de los estudiantes se intensifica eficazmente cuando enfrentan problemas que requieren una resolución independiente, sin la intervención directa del docente (Brousseau, 2007; Panizza et al., 2009). El núcleo principal de las TSD es la situación didáctica, que, desde la perspectiva de Brousseau, se contrapone al enfoque tradicional, en que el conocimiento no se contextualiza (Chavarría, 2006; Villalta et al., 2011).

Para Brousseau (2007), en una situación didáctica intervienen tres elementos fundamentales: estudiantes, profesor y medio didáctico, tal como se representa en la Figura 2. Así, una situación didáctica es entendida como “el conjunto de relaciones establecidas estudiantes-profesor-medio didáctico [...] con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución” (p. 38). Vidal (2008) también define una situación didáctica como “el trabajo que realiza el alumno interactuando con el problema

propuesto o discutiéndolo con sus compañeros, es decir, cuando interactúa con el entorno preparado por su mentor” (p. 3).

Figura 2

Subsistemas Didácticos



Nota. Adaptada de Sistema Didácticos, de Chamorro, 2005.

De acuerdo con Brousseau (1986; 2007), la teoría de las situaciones didácticas identifica tres categorías específicas dentro de la situación a-didáctica: acción, formulación y validación:

- Situaciones de acción: el estudiante interactúa con un entorno, ya sea tangible o simbólico. La circunstancia no requiere más que la activación de conocimientos implícitos o no explícitos. El estudiante, de manera individual, se involucra con el entorno didáctico para resolver problemas y adquirir conocimientos.
- Situaciones de formulación: este tipo de situaciones involucran a un estudiante (o un conjunto de estudiantes) que deben emitir un mensaje claramente expresado a otro estudiante (o grupo de estudiantes) que lo recibe. El receptor debe entender el mensaje y actuar (en un soporte tangible o simbólico) a partir de la información que contiene.
- Situaciones de validación: los estudiantes (o grupos de estudiantes) deben formular enunciados y alcanzar un consenso sobre su veracidad o falsedad. Las proposiciones que cada grupo presenta se someten al juicio del otro grupo, que debe ser capaz de validarlas, es decir, aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas o presentar afirmaciones contrarias.

No obstante, la implementación de esta teoría en el aula puede encontrar dificultades debido a ciertos efectos específicos que Brousseau identificó como fenómenos asociados a una inadecuada transposición didáctica o disfuncionamientos del contrato didáctico (Chamorro, 2005). Dichos efectos incluyen: Topaze y el control de la incertidumbre; Jourdain o el malentendido fundamental; el deslizamiento metacognitivo-meta didáctico y el uso excesivo de la analogía. Estas implicancias derivadas de una transposición didáctica insuficientemente efectiva subrayan la necesidad de elaborar con meticulosidad las situaciones didácticas y a-didácticas y de calibrar adecuadamente la dirección práctica por parte del docente.

Finalmente, el docente tiene la responsabilidad de institucionalizar el conocimiento al concluir la situación a-didáctica. Este proceso se desencadena cuando los conocimientos que han sido construidos y validados por los estudiantes se transforman en conocimientos institucionalizados, es decir, aquellos que son reconocibles y aceptables por la comunidad educativa (Brousseau, 1986). En términos más sencillos, la situación de institucionalización se produce “cuando el profesor toma lo que los alumnos han trabajado y lo formaliza” (Burgos et al., 2018, p. 31).

2.2.2. Modelo de aprendizaje geométrico de Van Hiele

La estructura teórica del Modelo de Aprendizaje Geométrico de Van Hiele (Van Hiele, 1957; Van Hiele-Geldof, 1957) se bifurca en dos dimensiones cruciales: una descriptiva y otra instructiva. La dimensión descriptiva proyecta un esquema para identificar y valorar las distintas manifestaciones del razonamiento geométrico de los individuos, mientras que la dimensión instructiva delinea pautas pedagógicas para nutrir el avance de los estudiantes a lo largo de estos niveles de razonamiento geométrico.

La exposición por Alsina et al. (1997) respecto a la dimensión descriptiva del modelo de Van Hiele, articula una estratificación del conocimiento geométrico en niveles de razonamiento secuenciales y ordenados, postulando una progresión en que cada nivel de conocimiento se edifica sobre el anterior. Esta estratificación remite al aprendizaje como un proceso inductivo y proporciona una lente analítica para descifrar los obstáculos que los estudiantes podrían enfrentar al navegar a través de conceptos y relaciones geométricas. En particular, destaca la probabilidad de que los estudiantes hallen dificultades y no avancen si se les sitúa ante situaciones de aprendizaje que demandan un nivel de conocimiento superior al que poseen. Un ejemplo ilustrativo de esto sería pedir a los estudiantes que realicen traslaciones en el plano cartesiano utilizando vectores dados, sin que previamente hayan adquirido una comprensión clara sobre los elementos que definen un vector de forma única y la capacidad de identificar vectores como traslaciones de puntos en el plano.

Los cuatro niveles de razonamiento geométrico propuestos por el modelo de Van Hiele para la Enseñanza Básica y Enseñanza Media tal como es interpretada por Jaime (1993) establecen una progresión estructurada en la comprensión geométrica. A continuación, se detallan estos niveles:

- Nivel 1: Reconocimiento o Visualización. En esta etapa, los individuos identifican figuras geométricas basadas en su apariencia global, sin descomponerlas en sus componentes elementales. La interacción con las figuras es primariamente visual y no se emplea un lenguaje geométrico específico para describirlas. Este nivel se caracteriza por ser empírico y carecer de un marco conceptual riguroso.
- Nivel 2: Análisis. Los individuos pueden reconocer y analizar componentes y propiedades específicas de las figuras geométricas, aunque la capacidad para establecer relaciones o clasificaciones entre diferentes tipos de figuras aún no se ha desarrollado. Las propiedades se identifican de manera empírica, sin llegar a elaborar definiciones formales.
- Nivel 3: Clasificación. Los estudiantes clasifican las figuras geométricas según sus propiedades y comprenden cómo derivan unas propiedades de otras. Se alcanza un razonamiento lógico más avanzado, aunque aún no se aprecia la necesidad de rigor en los argumentos.
- Nivel 4: Deducción Formal. Los estudiantes comprenden la naturaleza axiomática de las matemáticas y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra. Se alcanza un alto grado de razonamiento lógico, pero aún no se reconoce la necesidad de rigor en los argumentos.

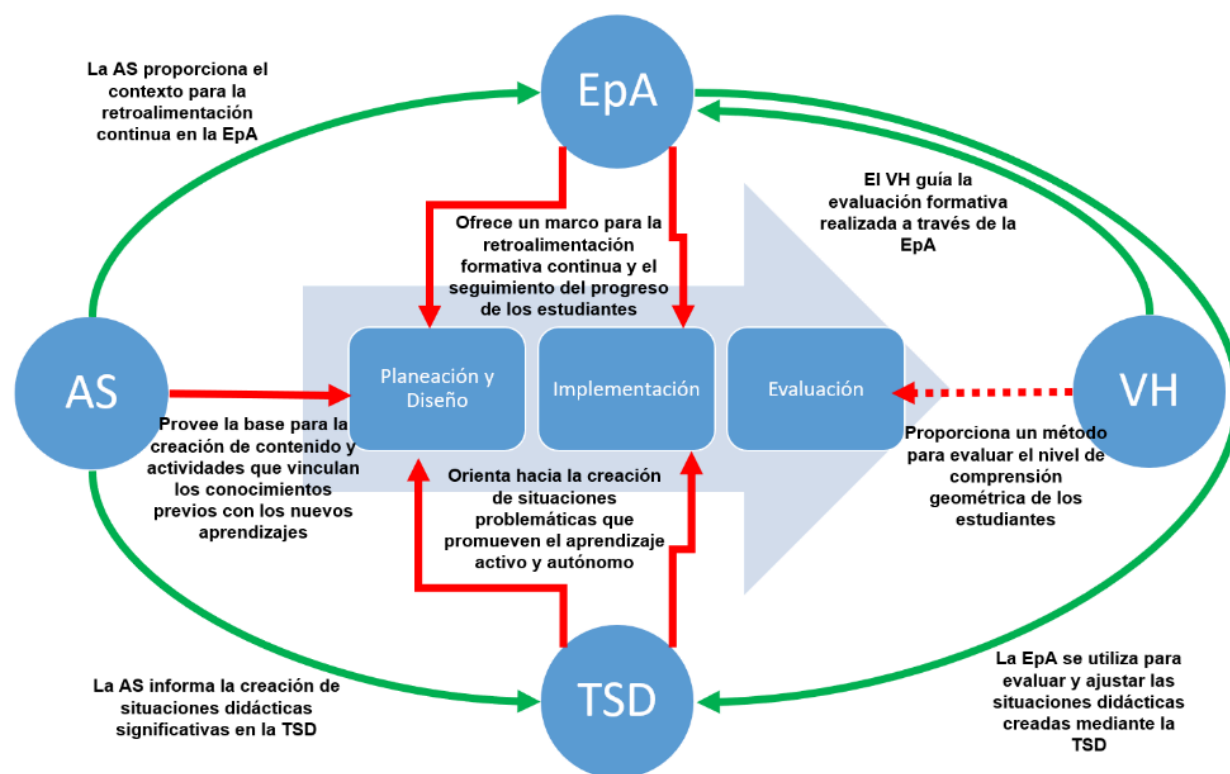
El componente instructivo del modelo propone una secuencia de fases de aprendizaje: 1) información, 2) orientación dirigida, 3) explicitación, 4) orientación libre e 5) integración. Estas fases delinear un itinerario pedagógico que promueve el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes, facilitando la transición de un nivel de razonamiento al siguiente mediante la incorporación de actividades y problemas específicos en cada fase. Es importante resaltar que estas fases no son exclusivas de un nivel específico, sino que en cada nivel los estudiantes inician con actividades de la primera fase y progresan de manera secuencial, de tal forma que, al concluir la fase 5, deberían haber alcanzado el siguiente nivel de razonamiento (Fouz y De Donosti, 2005; Jaime, 1993).

A modo de síntesis, la Figura 3 ofrece una representación visual integrada y cohesiva de las teorías y modelos pedagógicos y didácticos clave que fundamentan la secuencia de clases propuesta. En el centro del esquema se encuentra la secuencia de clases con sus tres partes: planificación y diseño, implementación y evaluación, alrededor de la cual se organizan los referentes como la Teoría del aprendizaje significativo (AS), la Evaluación para el Aprendizaje (EpA), la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y el Modelo de

Aprendizaje Geométrico de Van Hiele (VH). Cada uno de estos componentes está interconectado, mostrando cómo se complementan y contribuyen al proceso de enseñanza-aprendizaje de este trabajo de titulación.

Figura 3

Conexiones entre las teorías y modelos pedagógicos y didácticos utilizados en la secuencia de clases



Capítulo 3

Diseño y fundamentación de la secuencia de clases

3.1 Descripción y planificación de la secuencia de clases

La secuencia didáctica consta de 10 clases, organizadas en cuatro microunidades temáticas. Cada microunidad comienza con una clase que introduce la isometría correspondiente a través de situaciones de relevancia científica, seguida por una clase de modelado y ejercitación de problemas, y culmina con un control sumativo. Las primeras cuatro clases se enfocan en la introducción y consolidación del concepto de vectores, incluyendo traslaciones en el plano cartesiano. Las clases cinco a siete se centran en el estudio de las rotaciones. Las últimas tres clases tratan las simetrías axiales y centrales. Además, la primera clase de cada microunidad se complementa con una evaluación formativa, conocida como *ticket* de salida, que se realiza al final de dicha clase.

La única clase de la primera microunidad se dedica a explorar vectores como entidades que representan traslaciones de puntos en el plano cartesiano. Se emplea una situación-problema contextualizada en “el fallo del sistema de autoconducción del robot Perseverance”, que requiere desplazarse entre dos puntos específicos. Las actividades diseñadas permiten a los estudiantes comprender los elementos que caracterizan un vector de manera única, tales como magnitud, dirección y sentido, y analizar cómo las coordenadas del punto de origen y destino varían para establecer la representación algebraica del vector.

La segunda clase, que es la primera de la segunda microunidad, se enfoca en la traslación en el plano cartesiano. En esta clase, se utiliza como contexto de aprendizaje la situación didáctica “la búsqueda de rastros de vida antigua en Marte” por el robot Perseverance. Las actividades diseñadas para esta clase tienen como objetivo facilitar la comprensión de la traslación de figuras en el plano cartesiano. A través de estas actividades, los estudiantes tienen la oportunidad de formular conjeturas sobre esta isometría, basándose en la observación de cómo cambian las coordenadas de los vértices de las figuras trasladadas.

La quinta clase, que inicia la tercera microunidad, se enfoca en el concepto de rotación, abordándolo primero en el plano euclidiano y después en el plano cartesiano. La primera actividad de esta clase actúa como un repaso del concepto de rotación en el plano euclidiano, empleando un transportador y un compás para solucionar problemas. En la segunda actividad, se introduce las rotaciones en el plano cartesiano. Esta actividad presenta un escenario en que el robot Perseverance y la cámara-dron Ingenuity llevan a cabo una misión en Marte. En esta misión, se reta a los estudiantes a aplicar rotaciones en torno al origen y según ángulos notables, así como a formular relaciones algebraicas que permitan rotar cualquier punto con respecto al centro y ángulos en estudio.

La octava clase, que es la primera de la cuarta y última microunidad, se centra en el estudio de las simetrías en el plano cartesiano. En la primera actividad, los estudiantes deben enfrentar una situación que les desafía a encontrar las posibles ubicaciones del robot Perseverance utilizando coordenadas cartesianas, bajo ciertas condiciones preestablecidas que les permiten conjeturar sobre la simetría axial. La segunda actividad consiste en tres problemas: los dos primeros se enfocan en el análisis de la simetría de puntos respecto a rectas horizontales y verticales, mientras que el tercero desafía a los estudiantes a explorar la relación entre una doble simetría en los ejes cartesianos y una rotación de 180° con centro en el origen, para comprender las simetrías centrales.

Esta secuencia didáctica fue diseñada con base en el programa de estudio de octavo básico de matemática, específicamente la Unidad 3 del eje de geometría, para el objetivo de aprendizaje 13 (OA 13):

Describir la posición y el movimiento (traslaciones, rotaciones y reflexiones) de figuras 2D, de manera manual y/o con software educativo, utilizando: a) los vectores para la traslación, b) los ejes del plano cartesiano como ejes de reflexión y c) los puntos del plano para las rotaciones. (Mineduc, 2016a, p. 139)

El objetivo general de la secuencia de clase es:

1. Resolver problemas en distintos contextos que requieran la aplicación de las transformaciones isométricas y sus propiedades a figuras geométricas en el plano cartesiano.

En la siguiente red de contenidos, las y los estudiantes necesitan como conocimientos previos:

1. Plano cartesiano (puntos, segmentos y cuadrantes).
2. Construcciones geométricas (segmentos y ángulos).
3. Isometrías en el plano euclidiano, de manera concreta y pictórica.

La Tabla 1 ofrece un esquema detallado de la planificación de la secuencia de clases, abarcando tanto los contenidos temáticos como los objetivos de aprendizaje específicos. Para un análisis más exhaustivo de la estructura y elementos de cada clase, se proporciona una planificación detallada en el Anexo A.

Tabla 1

Tema, objetivos de aprendizaje, indicadores y tipo de evaluación de cada clase de la secuencia

Tema	Objetivo de aprendizaje	Indicadores de evaluación	Clase	Tipo de evaluación
Vectores	Representar vectores como una traslación de puntos en el plano cartesiano.	Identifican vectores como una traslación de puntos en el plano cartesiano.	1	Formativa: Guía de aprendizaje. <i>Ticket</i> de salida.
Traslaciones	Aplicar propiedades de los vectores para describir y realizar traslaciones de puntos y figuras en el plano cartesiano.	Identifican traslaciones en situaciones diversas.	2	Formativa: Guía de aprendizaje. <i>Ticket</i> de salida.
		Conjeturan sobre las condiciones de congruencia entre una figura y su imagen.	3	Formativa: Guía de aprendizaje.
		Realizan traslaciones en el plano cartesiano con vectores dados.	4	Sumativa: Control
Rotaciones	Resolver problemas que requieran la aplicación de rotaciones en el plano utilizando compás, transportador y relaciones algebraicas	Determinan el vector entre la imagen y la preimagen de dos figuras trasladadas.		
		Identifican rotaciones en situaciones diversas.	5	Formativa: Guía de aprendizaje. <i>Ticket</i> de salida.
		Conjeturan sobre las condiciones necesarias de una rotación en un plano euclídeo.	6	Formativa: Guía de aprendizaje.
		Rotan puntos y figuras con centro en el origen y un ángulo dado en el plano cartesiano.	7	Sumativa: Control.
		Determinan el ángulo de rotación con centro en el origen del plano entre la imagen y la preimagen de dos puntos o figuras rotadas.		

Simetrías	Crear simetrías en puntos y figuras utilizando ejes, rectas y el origen del plano cartesiano.	<p>Identifican reflexiones en situaciones diversas.</p> <p>Conjeturan sobre las condiciones necesarias de una simetría axial y simetría central.</p> <p>Reflexionan puntos y figuras según los ejes dados, de manera pictórica y simbólica.</p> <p>Determinan el eje de reflexión entre la imagen y la preimagen de dos puntos o figuras.</p> <p>Reflexionan puntos o figuras según el origen del plano cartesiano, de manera pictórica y simbólica.</p>	8	Formativa: Guía de aprendizaje. <i>Ticket</i> de salida.
			9	Formativa: Guía de aprendizaje.
			10	Sumativa: Control.

Nota. Elaboración propia (Tomado de Mineduc, 2015).

3.2 Fundamentación de la secuencia de clases

3.2.1. A partir del diagnóstico institucional y de curso

La secuencia de clases presentada en este artículo se fundamenta en un análisis detallado, tal como se detalla en el Capítulo 1. Dicho análisis resalta los retos específicos que enfrenta el 8°A en su desarrollo académico, particularmente en el ámbito del aprendizaje matemático. Un desafío esencial identificado es el de desmontar las creencias persistentes de los estudiantes sobre su propia incapacidad matemática y reforzar su confianza en sus habilidades para resolver problemas. Estos factores influyen significativamente en la motivación, el compromiso y el bienestar emocional de los alumnos, convirtiéndose en un pilar fundamental para fomentar una experiencia educativa enriquecedora (Bandura, 1997; González et al., 2016; Shabab, 2023).

La secuencia de clases apunta a superar estos obstáculos pedagógicos mediante la implementación de una retroalimentación positiva que resalte el esfuerzo de los estudiantes en su participación y contribución al aprendizaje colectivo e individual en el aula. Esta retroalimentación valora sus aportes, desempeños, producciones y procesos de aprendizaje, y busca fomentar la participación de todos los estudiantes, tanto en actividades individuales como grupales.

3.2.2. A partir del referente teórico pedagógico

Un pilar esencial en este contexto es la evaluación para el aprendizaje (EpA), que centra su atención en el proceso de aprendizaje más que en los resultados. Proporciona una retroalimentación continua que permite a los estudiantes reflexionar sobre sus aciertos y errores, una perspectiva avalada por diversas investigaciones en el campo de la pedagogía (Hattie y Timperley, 2007; Ibarra-Sáiz y Rodríguez-Gómez, 2019; Sanmartí, 2007; Zepeda, 2017). La EpA se integra mediante *tickets* de salida y retroalimentación constante, facilitando la identificación temprana de áreas de mejora y los ajustes necesarios en la instrucción, conforme a lo documentado por Black & Wiliam (1998).

En esta secuencia de clases, la estructura pedagógica constructivista se ha diseñado para incorporar la retroalimentación de la EpA mediante discusiones grupales y plenarias en las clases temáticas, a través de las hojas de actividades y en las sesiones de estudio a través de las clases de modelado y práctica individual y grupal de ejercicios. Cada clase aspira a crear un ambiente propicio para que los estudiantes superen las

barreras pedagógicas detectadas. Se promueve un aprendizaje a través de la resolución de problemas, discusiones entre pares y trabajo en equipo, con el docente desempeñando un rol de guía y moderador de las situaciones a-didácticas (Brousseau, 2007).

3.2.3. A partir de los referentes teóricos didácticos

Para el diseño e implementación de esta secuencia, se recurre a la Teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau (1986). Esta teoría permite la diversificación de situaciones y preguntas planteadas a los estudiantes por medio de las hojas de actividades en las clases temáticas y sesiones de modelado y ejercitación, para favorecer la construcción de nuevos conocimientos a partir de experiencias desafiantes. Esta estrategia concuerda con las recomendaciones de la investigación en educación matemática, que subrayan la importancia de la resolución autónoma de problemas y la aplicación de las matemáticas en contextos prácticos con los estudiantes como protagonistas del proceso educativo para una apropiación significativa de las matemáticas en la vida cotidiana (Brousseau, 1986, 2007; Foong, 2014; Hollebrands, 2003; Lester, 1994; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1992).

En la evaluación de esta secuencia didáctica, la componente descriptiva del modelo de Van Hiele (1957) se erige como una herramienta esencial para la evaluación y análisis de las producciones de los estudiantes a través de las evaluaciones formativas (*tickets* de salida), evaluaciones sumativas (controles por isometría) y participación en las discusiones grupales y plenarias orquestadas en las clases temáticas a través de revisión de cuadernos y plenarias. A través de los niveles de Van Hiele, se clasificará y evaluará formativamente el nivel de apropiación del lenguaje geométrico y sus habilidades inherentes, proporcionando un método para evaluar el nivel de comprensión y competencias de cada transformación isométrica en estudio. Esta estrategia metodológica, respaldada por el diagnóstico inicial, facilita una evaluación de las habilidades y comprensiones de los estudiantes en diferentes grados de razonamiento geométrico (Aray Andrade et al., 2019; Goncalves, 2006; Jaime, 1993; Restrepo-Ochoa et al., 2023). La secuencia de clases se beneficia del Modelo de Van Hiele para evaluar y discernir la progresión del razonamiento geométrico en los estudiantes, permitiendo: una adaptación de las estrategias de enseñanza a las necesidades y niveles de comprensión de los estudiantes, y una guía para ajustar la evaluación formativa realizada a través de la EpA.

3.2.4. A partir del referente teórico disciplinar

En el ámbito de las transformaciones isométricas, los conceptos introductorios de vectores, así como las isometrías de traslación, rotación y simetría, son esenciales para el análisis geométrico y la comprensión de la idea de cambio en la naturaleza (ver Anexo C). Estos conceptos se organizan en microunidades temáticas, que se estructuran lógicamente para no solo profundizar la comprensión de la materia, sino también para sentar las bases del aprendizaje de conceptos geométricos avanzados como la congruencia, semejanza en figuras planas y homotecia en dos y tres dimensiones (Mineduc, 2017). Paralelamente, la comprensión y aplicación de isometrías se vinculan estrechamente con el uso adecuado de instrumentos de medición, como la regla, escuadra, compás y transportador, y habilidades prácticas como la construcción de segmentos y ángulos.

La secuencia didáctica presentada en este artículo integra de manera coherente estas transformaciones isométricas, partiendo de los conocimientos previos que los estudiantes deben haber adquirido en clases anteriores. Por ejemplo, la comprensión de puntos y el plano cartesiano es esencial para estudiar vectores, mientras que la comprensión de vectores y sus propiedades es crucial para realizar traslaciones de figuras. Además, las habilidades en construcciones de ángulos y segmentos, junto con el uso adecuado de compás y transportador, son necesarias para efectuar rotaciones, y la comprensión de rotaciones con centro en el origen y un ángulo de 180° es clave para entender la simetría central respecto al origen. Esta metodología promueve un aprendizaje geométrico lógico y progresivo. Los objetivos de aprendizaje están diseñados para desafiar a los estudiantes a desarrollar habilidades cada vez más avanzadas, lo que facilita el discernimiento en el razonamiento geométrico de los estudiantes a la vez que los motiva a relacionar las isometrías con sus propiedades y aplicaciones prácticas.

Capítulo 4

Resultados de aprendizajes y reflexión de la implementación

4.1 Resultados de aprendizaje de los estudiantes

Conforme se detalló en el inciso 3.1 sobre la descripción general de la secuencia de clases, se implementaron diversas tareas de desempeño y tipos de evaluación para evaluar el aprendizaje de las y los estudiantes. En la clase introductoria de cada microunidad temática, se aplicaron dos instrumentos de evaluación formativa: una hoja de actividades de desarrollo grupal e individual y un *ticket* de salida de respuesta individual. En la última clase de cada microunidad, se aplicó una evaluación sumativa a través de un control individual.

Teniendo en cuenta la gran cantidad de resultados de aprendizaje obtenidos de la secuencia de clases, para efectos del análisis que se realiza en este artículo, solo se seleccionaron los resultados de las hojas de actividades de la clase 1, 2, 5 y 8 y sus respectivos *tickets* de salida. Los resultados de aprendizaje de los controles se encuentran en los Anexos B.3, B.6 y B.9 con su respectivo análisis. Esta selección se sustenta en la significancia de las clases introductorias en función de los referentes didácticos y la progresión de conocimientos establecidas, además de la relevancia de los objetivos específicos de las clases para el logro del OA de las Bases Curriculares.

4.1.1. Clase 1: vectores. Hoja de actividades N°1

En la primera clase, los estudiantes comenzaron su exploración de las isometrías centrándose en un concepto fundamental para las traslaciones en el plano cartesiano: los vectores. El medio didáctico de la misión del robot Perseverance en Marte planteó un problema real: la reubicación del robot entre dos puntos específicos debido a una falla en su sistema de autoconducción. Esta situación se abordó a través de dos actividades grupales para comenzar con la situación de acción. Los resultados de aprendizaje de estas actividades, consistentes en ambas tareas, se recopiló en el Anexo B.1.

Durante la fase de acción, en el desarrollo de las preguntas A y B de la actividad 2, enfocada en la identificación y aplicación de vectores para describir desplazamientos en el plano cartesiano, los estudiantes interactuaron con vectores de manera concreta. Esta fase permitió verificar los indicadores del Nivel 1 de reconocimiento del Modelo de Van Hiele. Sin embargo, fue necesario realizar aclaraciones sobre la redacción y los objetivos de las preguntas B y C. En la pregunta B, los estudiantes inicialmente no entendieron cómo describir el movimiento del Perseverance en términos de dirección y distancia. Se aclaró que se esperaba una descripción en términos de desplazamientos horizontales y verticales para moverse del punto A al punto B. En la pregunta C, se clarificó que una representación algebraica se refería a la representación como par coordenado del vector en cuestión.

Estas aclaraciones, aunque implicaron concesiones dentro del contrato didáctico, permitió que las situaciones de formulación y validación fueran más efectivas y ágiles. En la pregunta C, los estudiantes pasaron a una fase de análisis más profundo de los vectores, conforme al Nivel 2 del Modelo de Van Hiele. Las respuestas a las preguntas B y C, como se muestra en la Figura 4, reflejan una comprensión algebraica de los vectores, más allá de su apariencia visual.

La discusión crítica y la revisión de las respuestas de los estudiantes en la fase de validación permitió una comprensión más clara y profunda de los vectores. A pesar de las concesiones iniciales en el contrato didáctico, las aclaraciones proporcionadas facilitaron una mejor comprensión y aplicación del concepto de vectores en el análisis de desplazamientos en el plano. Esta evolución del entendimiento de los estudiantes sobre vectores, ilustrada en las actividades y sus resultados en el Anexo B.1, culminó en la institucionalización efectiva de los vectores como herramienta matemática esencial en la descripción del movimiento en el plano cartesiano.

Figura 4

Respuestas de algunos grupos en las preguntas B y C de la hoja de actividades N°1

<p>Se movió 2 u hacia la izquierda y 3 u hacia arriba</p> $\vec{U}_{AB} = (-2, 3)$ <p>(a)</p>	<p>Desde A uno debe moverse 3 bloques hacia arriba y 2 hacia la izquierda.</p> $\vec{U}_{AB} = (-2, 3)$ <p>(b)</p>
---	--

Nota. (a) Respuesta grupo 2 y (b) respuesta grupo 3.

4.1.2. Clase 1: vectores. Ticket de salida

En la Tabla 2 se presentan los resultados de aprendizaje obtenidos a través del *ticket* de salida de la clase de vectores. Este ejercicio consistió en una pregunta cuyo propósito formativo fue evaluar la habilidad de las y los estudiantes para identificar vectores como una traslación de puntos en el plano cartesiano. Los datos recogidos en la Tabla 2 revelan que la mayoría de los estudiantes alcanzó un desempeño óptimo. Lograron identificar de manera correcta el punto de partida y de llegada de un vector, y calcularon con precisión las diferencias entre sus coordenadas para determinar el vector en su forma algebraica.

Tabla 2

Resultados ticket de salida clase 1

Descriptor de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores Pregunta: <i>¿cuál es el vector que permite representar de manera precisa el desplazamiento de la hormiga del punto de partida al punto de llegada?</i>	El o la estudiante identifica correctamente el punto de partida y de llegada de la hormiga en el plano cartesiano. Calcula acertadamente las diferencias en las coordenadas x e y para determinar el vector de traslación. Representa el vector en forma algebraica con precisión,	El o la estudiante reconoce el punto de partida y de llegada y calcula las diferencias en las coordenadas x e y. Hay un pequeño error en la representación algebraica del vector de traslación, pero se muestra entendimiento general del concepto de vector y su aplicación en el plano cartesiano.	El o la estudiante identifica los puntos en el plano cartesiano pero comete errores al calcular las diferencias en las coordenadas x e y, lo que lleva a una representación incorrecta del vector de traslación. Hay una comprensión básica de los vectores, pero se necesita una mejor aplicación y explicación del concepto.	El o la estudiante no logra identificar correctamente los puntos de partida y de llegada en el plano cartesiano y no puede calcular el vector de traslación. La representación algebraica del vector es incorrecta o no se presenta, y no hay evidencia de comprensión del concepto de vector o cómo representarlo algebraicamente
Porcentajes de logro obtenidos	94% (16 estudiantes)		6% (1 estudiante)	

En términos generales, los resultados indican que la mayoría de los estudiantes posee los conocimientos y aprendizajes previos necesarios para aplicar las propiedades de los vectores en la descripción y realización de traslaciones de figuras en el plano cartesiano. Este hallazgo refuerza la efectividad del *ticket* de salida como una herramienta formativa y resalta la importancia de la preparación previa en la planificación de clases para anticipar y abordar posibles áreas de confusión entre los estudiantes.

4.1.3. Clase 2: traslaciones. Hoja de actividades N°2

En la segunda clase, las y los estudiantes profundizaron su comprensión de las traslaciones en el plano cartesiano pero ahora por medio de figuras 2D, utilizando como medio didáctico la misión del robot Perseverance en Marte. Este escenario práctico, centrado en un problema de reubicación del robot debido a una falla en su sistema de autoconducción, presentó una oportunidad para aplicar el concepto de traslaciones de manera tangible. La clase se dividió en dos actividades grupales y una tercera individual: la primera se enfocó en traslaciones dentro del primer cuadrante, la segunda expandió el alcance hasta el tercer cuadrante, brindando una demostración práctica de las traslaciones a lo largo de todo el plano cartesiano. Mientras que la tercera actividad requería que cada estudiante definiera con sus propias palabras el concepto de traslación en el plano cartesiano. Los aprendizajes logrados en la primera actividad están documentados en el Anexo B.2.

A lo largo de la fase de acción, la mayoría de los grupos mostró habilidad para ubicar puntos en el plano y aplicar vectores de traslación correctamente, logrando trasladar los puntos de forma coherente para mantener la forma original en una nueva posición. No obstante, algunos grupos enfrentaron dificultades al especificar y explicar el movimiento de Perseverance. Estas dificultades parecían relacionarse tanto con la formulación de la pregunta como con sus conocimientos previos, en particular en la identificación de puntos en el plano cartesiano y la comprensión de los desplazamientos horizontales y verticales. Para abordar este reto, se realizó una breve reenseñanza de estos conceptos fundamentales, a través del mapeo de algunos puntos en el plano cartesiano, acompañada de una clarificación detallada de las preguntas.

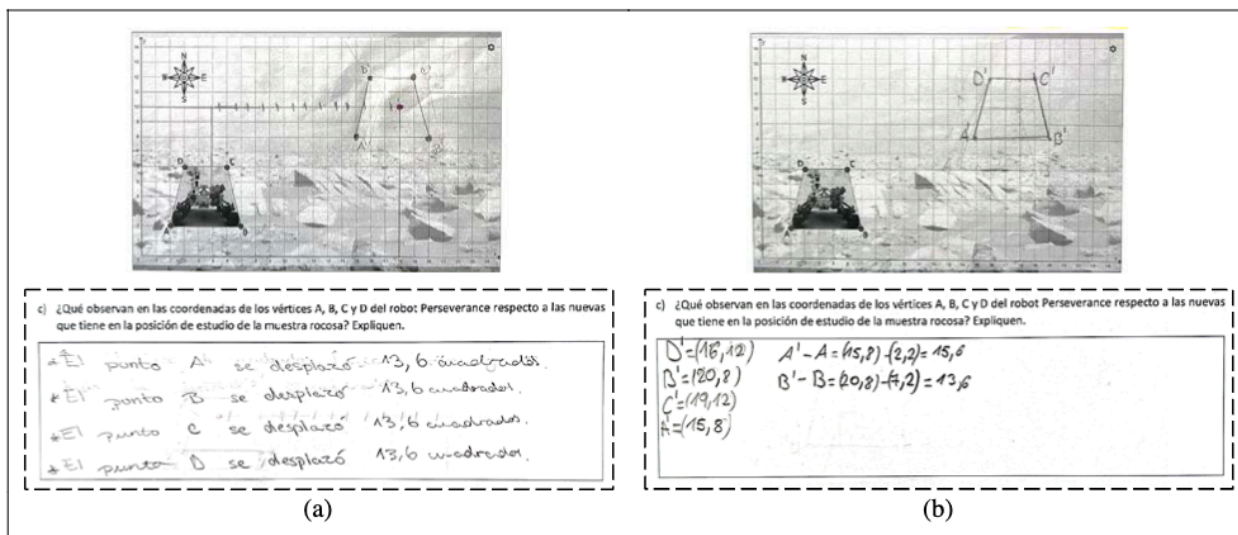
Posteriormente, durante la fase de formulación y validación, la pregunta C propuso a los grupos el desafío de explicar cómo la traslación afectaba la posición de un objeto en el plano cartesiano. El grupo 4, al responder dicha pregunta (ver Figura 5a), identificó acertadamente el desplazamiento uniforme de todos los vértices en la traslación de una figura, alcanzando así el Nivel 1 de reconocimiento en el Modelo de Van Hiele. Sin embargo, encontraron obstáculos al intentar relacionar este movimiento con las características específicas de un vector, como su representación en forma de par ordenado, una habilidad necesaria para progresar al Nivel 2 del Modelo. En una situación similar, el grupo 5, al abordar la pregunta C (véase Figura 5b), intentó calcular las coordenadas del vector de traslación, estableciendo una relación algebraica entre los puntos y sus imágenes. A pesar de algunos errores iniciales, logró identificar elementos clave de los vectores, tales como la independencia de los desplazamientos horizontales y verticales informada por el par ordenado, lo que evidenció un avance hacia el Nivel 2 de análisis en el Modelo de Van Hiele, al comprender los elementos fundamentales que definen la isometría en estudio.

Durante la fase de validación e institucionalización, que se llevó a cabo mediante discusiones grupales y plenarias, los estudiantes tuvieron la oportunidad de evaluar críticamente las respuestas de sus compañeros. Este segmento de la clase subrayó la importancia de formular argumentos con precisión y comunicarlos de manera efectiva, poniendo énfasis en el uso correcto del vocabulario geométrico, especialmente en la diferenciación entre punto y vector. Se observó que la capacidad de los estudiantes para analizar y debatir conceptos geométricos requería mayor desarrollo. Por ello, se decidió hacer una concesión en el contrato didáctico. Se intervino para modelar la notación de un vector, explicando su distinción con respecto a un punto en el plano cartesiano, y se reforzó con una representación gráfica en la pizarra. Luego, se diseñó tres ejercicios en pizarra para que los estudiantes argumentaran qué representación corresponde a un punto y cuál a un vector, caracterizando a este último como un segmento dirigido con un punto de inicio y un punto de destino.

Siguiendo esta dinámica de aprendizaje, la actividad 3 se diseñó específicamente para consolidar el conocimiento adquirido. En esta etapa crucial, los estudiantes se dedicaron a elaborar definiciones de una traslación en el plano cartesiano, utilizando sus propias palabras y ejemplos para expresar su comprensión. Este enfoque resultó ser una estrategia efectiva para la institucionalización del concepto, ya que animó a las y los estudiantes a internalizar y personalizar su aprendizaje.

Figura 5

Respuestas de algunos grupos en la pregunta C de la actividad 1 de la hoja de actividades N°2

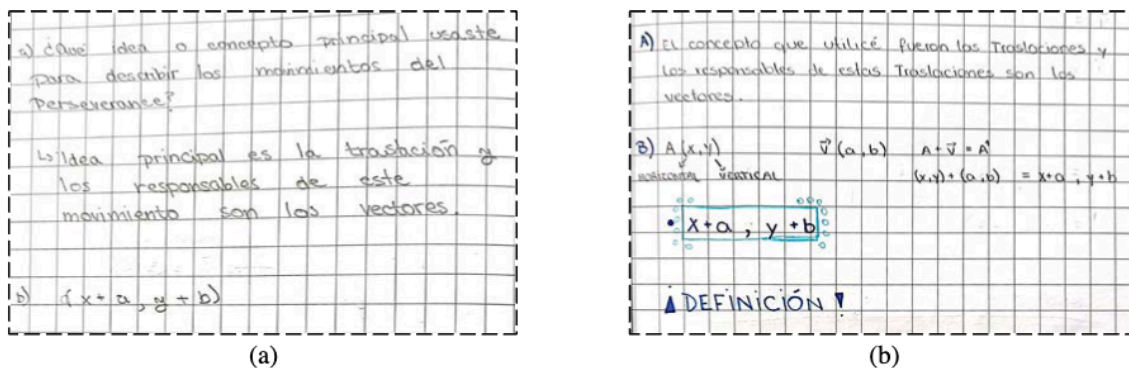


Nota. (a) Respuesta grupo 4 y (b) respuesta grupo 5.

La profundidad y claridad de las respuestas de la estudiante 10 y de la estudiante 15, presentadas en la Figura 6, son testimonio de una comprensión colectiva cada vez más detallada de las traslaciones. Estos ejemplos específicos ilustran cómo estos estudiantes progresaron desde el Nivel 1 de reconocimiento hasta alcanzar el Nivel 3 de clasificación en el Modelo de Van Hiele. Ambas, a través de sus explicaciones, lograron establecer una relación clara entre las coordenadas de un punto y las de su imagen después de aplicar un vector de traslación. Esta habilidad para conectar teoría y práctica indica un avance significativo hacia el Nivel 3 de clasificación en el Modelo de Van Hiele, lo que refleja un dominio más completo de los conceptos geométricos involucrados.

Figura 6

Respuestas de algunos estudiantes en la pregunta C de la actividad 1 de la hoja de actividades N°2



Nota. (a) Respuesta estudiante 10 y (b) respuesta estudiante 15.

4.1.4. Clase 2: traslaciones. Ticket de salida

El ticket de salida de la segunda clase fue una herramienta formativa para evaluar la habilidad de las y los estudiantes de formular conjeturas sobre la congruencia entre figuras y sus traslaciones y de identificar el vector que relaciona la imagen con la preimagen de dos figuras trasladadas. Los datos recopilados en la Tabla 3 indican que la gran mayoría de los estudiantes alcanzó niveles de desempeño óptimo o satisfactorio.

Esto demuestra que se cumplió el objetivo de enseñar a los estudiantes a describir movimientos en el plano cartesiano, a formular hipótesis sobre la congruencia entre figuras y sus traslaciones, y a determinar con precisión el vector entre la imagen y la preimagen de dos figuras trasladadas.

Tabla 3

Resultados ticket de salida – clase 2

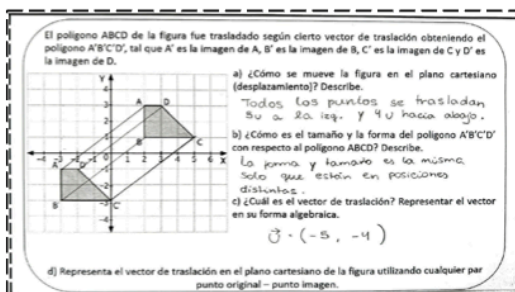
Pregunta A (n=19)				
¿Cómo se mueve la figura en el plano cartesiano (desplazamiento)? Describe.				
Descriptor de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El o la estudiante describe con exactitud la dirección y la cantidad de unidades que la figura se desplaza tanto en el eje X como en el eje Y.	El o la estudiante describe correctamente la dirección del desplazamiento pero con imprecisiones menores en la cantidad de unidades.	El o la estudiante identifica una dirección de desplazamiento pero no es completamente preciso en las unidades o la dirección.	El o la estudiante no logra identificar correctamente la dirección ni la cantidad de desplazamiento de la figura.
Porcentajes de logro obtenidos	84% (16 estudiantes)	5% (1 estudiante)	11% (2 estudiantes)	
Pregunta B (n=19)				
¿Cómo es el tamaño y la forma del polígono A'B'C'D' con respecto al polígono ABCD? Describe.				
Descriptor de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El o la estudiante explica correctamente que el tamaño y la forma del polígono trasladado son idénticos al original y detalla cómo esto es característico de una traslación.	El o la estudiante reconoce que el tamaño y la forma se mantienen pero no proporciona una explicación completa de las propiedades de la traslación.	El o la estudiante observa que el polígono trasladado es similar al original pero tiene errores o carencias en la explicación de las propiedades de traslación.	El o la estudiante no reconoce que el tamaño y la forma del polígono trasladado son iguales al polígono original.
Porcentajes de logro obtenidos	42% (8 estudiantes)	47% (9 estudiantes)	11% (2 estudiantes)	
Pregunta C y D (n=19)				
¿Cuál es el vector de traslación? Representar el vector en su forma algebraica y gráfica.				
Descriptor de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El o la estudiante identifica y representa correctamente el vector de traslación en su forma algebraica y gráfica, mostrando las diferencias en las coordenadas de los puntos correspondientes y dibujando el vector en el plano cartesiano con la dirección y magnitud adecuadas.	El o la estudiante representa el vector de traslación en forma algebraica y gráfica con pequeños errores, ya sea en la magnitud, la dirección o la selección del par de puntos.	El o la estudiante tiene una comprensión parcial del vector de traslación, con errores significativos en su representación algebraica o gráfica.	El o la estudiante no logra identificar ni representar el vector de traslación ni en su forma algebraica ni en su representación gráfica en el plano cartesiano.

Porcentajes de logro obtenidos	42% (8 estudiantes)	47% (9 estudiantes)	11% (2 estudiantes)	
--------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	-------------------------------	--

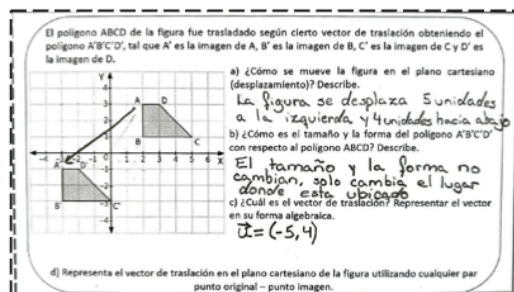
Por ejemplo, los estudiantes 1 y 6 reconocieron que la forma y el tamaño del polígono, tanto en su posición original como trasladada, se mantienen invariables y que lo único que cambia es su posición en el plano. Estas respuestas confirman que estos estudiantes han comprendido qué una traslación genera figuras congruentes y han identificado las condiciones necesarias para definirla, como se refleja en sus respuestas en la Figura 7.

Figura 7

Respuestas de algunos estudiantes en el ticket de salida de la clase 2



Estudiante 1: “b) La forma y tamaño es la misma solo que están en posiciones distintas”.



Estudiante 6: “b) El tamaño y la forma no cambian, solo cambia el lugar donde está ubicado”.

4.1.5. Clase 5: rotaciones. Hoja de actividades N°3

La quinta clase se enfocó en las rotaciones en el plano euclidiano y cartesiano. Utilizando como medio didáctico la misión del robot Perseverance en Marte, las y los estudiantes enfrentaron el reto de moverse de un punto a otro evitando un cráter, limitando al robot a solo realizar giros. En la primera actividad debían identificar el centro de rotación y medir el ángulo necesario para este movimiento, cuyos resultados de aprendizaje están recogidos en el Anexo B.4. La segunda actividad consistió en explorar varios ángulos de rotación y realizar rotaciones específicas de 90° , 180° y 270° en sentido antihorario, empleando compás y transportador. Esta parte culminó con una pregunta que les pedía formular conjeturas algebraicas sobre rotaciones con centro en el origen, basadas en las actividades previas, cuyos resultados se incluyeron en el Anexo B.5. Para estructurar las fases de acción, formulación y validación, se utilizó una hoja de actividades en grupos, promoviendo discusiones grupales y plenarias para construir colectivamente las respuestas a cada pregunta.

Durante la fase de acción, varios grupos enfrentaron dificultades al medir ángulos con compás y transportador, lo que reflejó deficiencias en su conocimiento previo sobre las propiedades de la rotación en el plano euclidiano y el uso adecuado de estas herramientas. Para abordar estos errores, se implementó una reenseñanza centrada en la construcción y medición de ángulos sobre una hoja en blanco, tanto en sentido horario como antihorario. Esta reenseñanza incluyó demostraciones en la pizarra y la participación de estudiantes voluntarios que practicaron la medición de otros ángulos. Además, se utilizó el software de geometría dinámica GeoGebra, haciendo una concesión en el contrato didáctico, para mostrar visualmente cómo medir los ángulos y determinar su sentido, utilizando las imágenes de las actividades 1 y 2 de la hoja de actividades como referencia.

Tras la reenseñanza, los resultados del aprendizaje, documentados en el Anexo B.4, revelaron que, salvo tres grupos que erraron en la segunda pregunta, la mayoría demostró un entendimiento efectivo de las rotaciones en distintos contextos y formularon hipótesis acertadas sobre los requisitos para realizar rotaciones en un plano euclidiano. Un ejemplo de esto fue la respuesta del grupo 2 a la primera pregunta, ilustrada en la Figura 8a, en que identificaron el punto P como el centro ideal de rotación. Durante las fases de validación e institucionalización, este grupo argumentó que la equidistancia del punto P respecto a los

puntos A y B lo convierte en el centro óptimo. Esta respuesta evidencia una clara comprensión del concepto de rotación y sus elementos, alineándose con el Nivel 2 de análisis en el Modelo de Van Hiele.

En un análisis paralelo realizado durante la fase de validación, el grupo 3, al responder a la misma pregunta mostrada en la Figura 8b, señaló específicamente al punto P como el centro de rotación. En la subsiguiente discusión plenaria, correspondiente a la fase de institucionalización, argumentaron que este punto permanece fijo durante la rotación, evidenciando un entendimiento detallado y explícito de los elementos definitorios de una rotación.

En las respuestas a la pregunta B, los grupos 2 y 3, cuyas contribuciones también se encuentran en la Figura 8, mostraron una comprensión adecuada del ángulo de rotación y su dirección. El grupo 2 identificó un ángulo de “150° grados hacia la izquierda”, lo que implica un movimiento en sentido horario. Por otro lado, el grupo 3 destacó la complementariedad de los ángulos al mencionar “151° en sentido horario” y “209° en sentido antihorario”, teniendo en cuenta la totalidad de los 360° de un círculo.

Figura 8

Respuestas de algunos grupos en las preguntas A y B de la actividad 1 de la hoja de actividades N°3

The figure shows two handwritten responses, (a) and (b), enclosed in dashed boxes. Response (a) is for question A and B, identifying point P as the center of rotation and calculating a 150° counter-clockwise rotation. Response (b) is for question B, identifying point P as the center of rotation and calculating 151° clockwise and 209° counter-clockwise rotations, accompanied by a diagram of a circle with these angles marked.

(a)

a) ¿Alrededor de cuál de los puntos P, Q, R o S debería girar el Perseverance para moverse del punto A al punto B?
Ayuda: Utilicen el Compás para dibujar cada trayectoria del punto A al B usando como centro de rotación, los puntos P, Q, R o S.

ALREDEDOR DEL PUNTO "P" PORQUE LOS OTROS PUNTOS ESTÁN HACIA LA FUERA DEL CRÁTER.

LA DISTANCIA QUE SEPARA AL PUNTO "P" DEL PUNTO "A" ES LA MISMA QUE SEPARA AL PUNTO "P" DEL PUNTO "B".

b) Una vez que elijan el punto o centro de rotación, ¿cuántos grados debería girar el Perseverance para llegar desde el punto A hasta el punto B?
Ayuda: Utilicen el Geodreick para medir el ángulo en base a la trayectoria elegida del problema anterior.

DEBE GIRAR 150° GRADOS A LA IZQUIERDA.

(b)

El punto P llega al punto B.
La distancia que separa al P de A es la misma que separa al punto P de B. En conclusión es el centro de rotación.

Diagrama: Un círculo con un punto P en el centro. Dos puntos A y B están sobre la circunferencia. Se marcan los ángulos de rotación: 151° en sentido horario (negativo) y 209° en sentido antihorario (positivo).

Nota. (a) Respuestas grupo 2 y (b) respuestas grupo 3.

En la segunda actividad, durante la fase de acción, varios grupos encontraron desafíos para entender la rotación que el Perseverance realiza alrededor del origen del plano, especialmente en relación con el movimiento del robot y el láser proyectado. Para resolver estas dificultades, se utilizó GeoGebra, mostrando un plano cartesiano con la imagen de fondo y la rotación correspondiente del Perseverance y su láser. Esta metodología se aplicó desde la pregunta A hasta la D, lo que llevó a una mayor intervención del profesor para facilitar las fases de formulación y validación, impactando en la autonomía de los estudiantes.

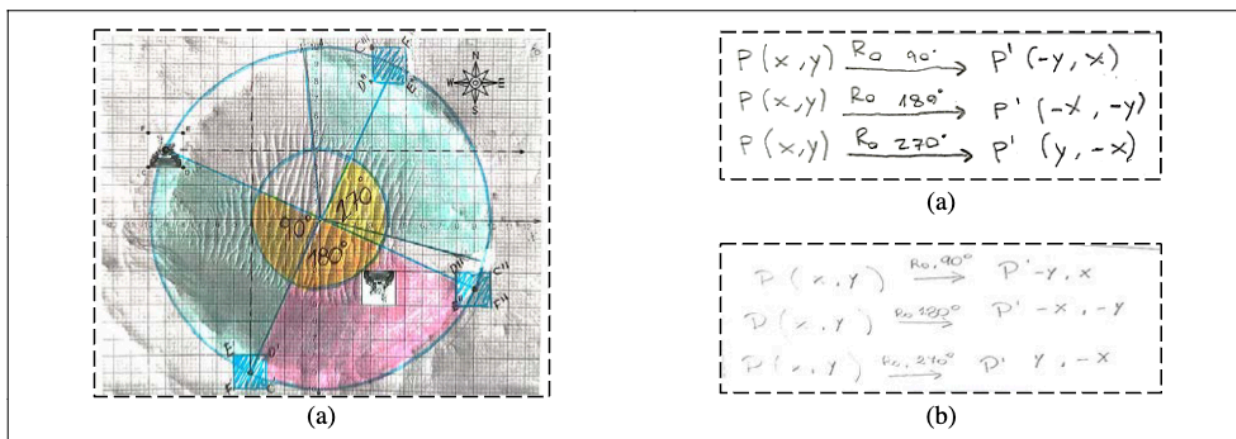
El análisis de los resultados en el Anexo B.5 mostró que, si bien la mayoría de los grupos logró rotar con éxito puntos y figuras en el plano cartesiano, definiendo adecuadamente el centro y el ángulo de rotación, aproximadamente la mitad enfrentó dificultades para estimar el rango de ángulos necesarios en la pregunta A. Esto subrayó la importancia de mejorar en el uso y medición con compás y transportador. El grupo 7, al igual que otros grupos, ilustró su proceso de rotación como se observa en la Figura 9a, utilizando segmentos desde el origen y una circunferencia concéntrica como guía. En la pregunta E, solo los grupos 1 y 7 pudieron explicar algebraicamente las rotaciones en 90°, 180° y 270° con centro en el origen de un punto cualquiera del plano cartesiano, lo que indicó un uso avanzado del vocabulario y la notación matemática, avanzando del nivel 2 al 4 en el Modelo de Van Hiele.

Los errores cometidos por algunos grupos en la pregunta E, relacionados con el uso del vocabulario, la notación algebraica y la formalización de relaciones algebraicas reveló un obstáculo didáctico significativo. En la fase de institucionalización de esta pregunta, los estudiantes revelaron que la utilización de una tabla de transformaciones para rotaciones de 90°, 180° y 270° para un punto genérico (x,y) había llevado a confusiones, haciendo que muchos intercambiaran los ejes del plano en lugar de los valores de las coordenadas de los puntos. Esta información fue fundamental para replantear la enseñanza de las rotaciones

con centro en el origen y ángulos notables. Esto se hizo efectivo en la clase 6 de modelamiento y ejercitación. En la reenseñanza se utilizó un punto genérico (a, b) en lugar del punto (x, y) , para clarificar que las transformaciones para ángulos notables se refieren a los valores de las coordenadas y sus opuestos aditivos, y no a una inversión de los ejes. Esta aclaración se enfatizó tanto en el modelamiento de problemas como en la práctica independiente y las discusiones en grupo.

Figura 9

Respuestas de algunos grupos en la pregunta E de la actividad 2 de la hoja de actividades N°3



Nota. (a) Respuestas grupo 7 y (b) respuesta grupo 1.

4.1.6. Clase 5: rotaciones. Ticket de salida

El *ticket* de salida de la quinta clase, detallado en la Tabla 4, consistió en dos preguntas formuladas para evaluar de forma formativa la capacidad de las y los estudiantes de efectuar rotaciones de puntos con centro en el origen y ángulos dados en el plano cartesiano, además de determinar el ángulo de rotación entre la imagen y la preimagen de puntos rotados.

Tabla 4

Resultados ticket de salida – clase 5

Pregunta A (n=14)		
¿Cuáles son las coordenadas del punto $A\left(\frac{3}{4}, -6\right)$ si se aplica una rotación en torno al origen, en los ángulos de 90° , 180° , 270° y 360° ?		
	Si	No
El estudiante calcula correctamente las coordenadas de A tras una rotación de 90° .	29% 4	71% 10
El estudiante calcula correctamente las coordenadas de A tras una rotación de 180° .	43% 6	57% 8
El estudiante calcula correctamente las coordenadas de A tras una rotación de 270° .	43% 6	57% 8
El estudiante reconoce que las coordenadas de A permanecen inalteradas tras una rotación de 360° .	50% 7	50% 7
Pregunta B (n=14)		
Se hizo rotar el punto $A(-4, -9)$ en un cierto ángulo alrededor del origen, obteniendo el punto $A'(-9, 4)$. ¿Cuánto mide el ángulo de rotación que se usó? Explica.		
	Si	No
El estudiante identifica que el ángulo de rotación es de 270° o -90°	71% 10	29% 4
El estudiante comprende y explica por qué la rotación es en sentido antihorario o horario		100% 14

A partir de los resultados obtenidos en la Tabla 4, se observa que la mayoría de los estudiantes logró determinar correctamente el ángulo de rotación entre dos puntos, uno siendo la rotación del otro respecto al origen. Sin embargo, ninguno pudo especificar el sentido de la rotación. Esto contrasta con el desempeño observado en la actividad 2 de la hoja de actividades N°3, en que los alumnos ejecutaron con éxito rotaciones de puntos con centro en el origen a 90° , 180° y 270° . La diferencia en esta ocasión fue la ausencia de un recurso visual o concreto para apoyar la realización de las rotaciones, lo que ya había sido indicado por los resultados de aprendizaje de la hoja de actividades N°3 (ver Anexo B.5), en que solo dos de ocho grupos logró establecer conjeturas algebraicas para las rotaciones en ángulos notable con centro en el origen.

4.1.7. Clase 8: simetrías. Hoja de actividades N°4

En la octava clase, se exploró la tercera y última isometría de la secuencia de clases: las simetrías axiales y centrales. A través de situaciones didácticas centradas en la misión del robot Perseverance en Marte, se planteó el problema de determinar la ubicación del robot mediante simetrías. La primera actividad requería encontrar los reflejos del polígono original respecto a los ejes coordenados y conjeturar sobre las coordenadas de la ubicación del robot tras su reflejo en los ejes. Estos resultados de aprendizaje se recopilaron en el Anexo B.7. La segunda actividad propuso un escenario matemático en el plano cartesiano en que los grupos debían analizar la simetría de puntos con respecto a ejes horizontales y verticales. Además, se les pidió conjeturar la relación entre una doble simetría en los ejes cartesianos y una rotación de 180° con centro en el origen, interpretando esta como una simetría central. Los resultados de aprendizaje de esta tarea se encuentran en el Anexo B.8. Para estructurar las fases de acción, formulación y validación, se utilizó una hoja de actividades en grupos, lo que promovió discusiones grupales y plenarias para construir colectivamente las respuestas a cada pregunta.

Como se evidenció en el desarrollo de las preguntas A y B, y reflejado en los resultados de aprendizaje del Anexo B.7, todos los grupos calcularon con precisión las coordenadas de los puntos reflejados en ambos ejes, demostrando así su competencia en realizar reflexiones en el plano cartesiano con soporte gráfico. Más del 80% de los grupos identificó acertadamente el cambio de coordenadas al moverse de un cuadrante a otro y describió con detalle los efectos de las reflexiones en cada eje.

Durante las etapas de formulación, validación e institucionalización, el grupo 3 argumentó correctamente, tanto en la discusión grupal como en la plenaria, cómo las coordenadas se alteran según el eje de reflexión. Su respuesta a la pregunta B, indicando que “se invierten dependiendo del eje alrededor del cual se reflejan. Si es alrededor del eje Y, se invierte el eje X y viceversa”, demostró comprensión, aunque no profundizó en el hecho de que la coordenada del eje de reflexión permanece inalterada. Esta respuesta parcial se utilizó como un recurso didáctico valioso en la fase de institucionalización, en que a través de GeoGebra se mostró al curso cómo la coordenada del eje respecto al cual se realiza la reflexión no cambia.

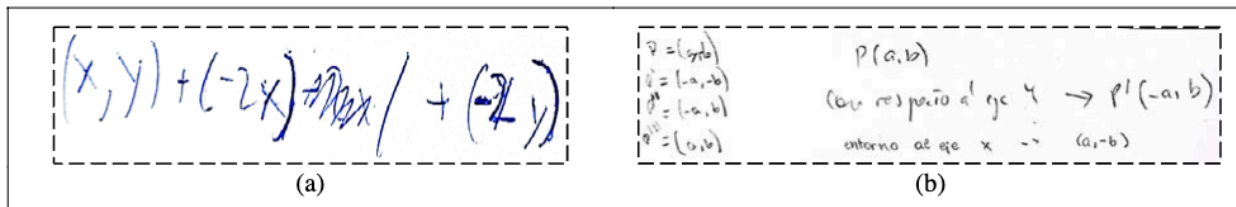
En las situaciones a-didácticas, el grupo 3 expuso su respuesta a la pregunta C, en que debían representar algebraicamente la transformación de un punto genérico al ser reflejado respecto a los ejes. Como se observa en la Figura 11a, y durante la discusión grupal, argumentaron que una reflexión respecto al eje Y se representa como $(x, y) + (-2x) = (-x, y)$ y respecto al eje X como $(x, y) + (-2y) = (x, -y)$, confundiendo los cambios en las coordenadas con operaciones vectoriales. Esta confusión posiblemente derivó de las lecciones sobre rotaciones, en que se enfatizó la importancia de enfocar las transformaciones en los valores de las coordenadas, más que en los ejes. Otros grupos encontraron dificultades en la pregunta C, lo que reveló un desafío asociado con la complejidad de utilizar el lenguaje matemático para generalizar relaciones sin soporte gráfico.

En la discusión plenaria de la fase de institucionalización de esta pregunta, el grupo 4, cuya respuesta se ilustra en la Figura 11b, logró emplear adecuadamente el lenguaje y la notación matemática adecuada para una simetría axial, pues no vincularon directamente su respuesta con las notaciones S_X o S_Y . No obstante, describió correctamente el proceso de transformación y representó las simetrías con un soporte algebraico. Esta habilidad de aplicar el entendimiento conceptual a una expresión matemática precisa refleja un

avanzado nivel de clasificación y deducción en el Modelo de Van Hiele. La respuesta del grupo 4 y de otros 3 grupos fueron claves para animar la fase de institucionalización de las simetrías axiales y proporcionar retroalimentación a los otros 3 grupos que enfrentaron dificultades al formalizar algebraicamente las simetrías de un punto genérico respecto a los ejes del plano cartesiano. La reenseñanza llevada a cabo en la clase de modelamiento y ejercitación subrayó, a través de ejercicios en GeoGebra y en la pizarra, que el cambio en el valor de la coordenada ocurre con su inverso aditivo u opuesto, un concepto que se enfatizó durante la clase 6 de modelamiento y ejercitación de rotaciones.

Figura 11

Respuestas de algunos estudiantes en la pregunta C de la actividad 1 de la hoja de actividades N°4



Nota. (a) Respuesta grupo 3 y (b) respuesta del grupo 4.

Los resultados presentados en el Anexo B.8 evidencian que los estudiantes comprendieron las reflexiones alrededor de los ejes para puntos específicos. Asimismo, la capacidad de tres grupos de cinco de realizar simetrías respecto a líneas horizontales y verticales demuestra en sus respuestas una correcta asimilación del principio de que las distancias entre el eje de simetría y el punto original deben ser iguales a las de su imagen reflejada.

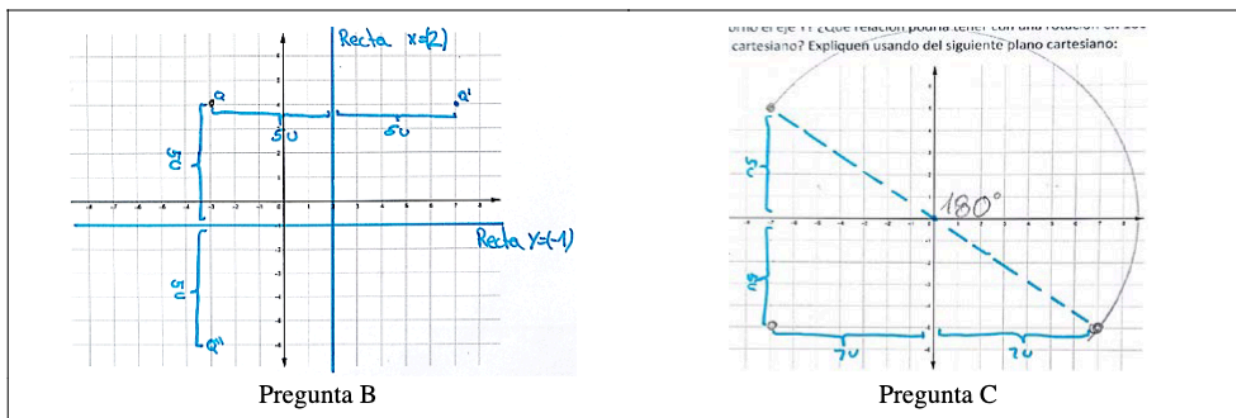
En particular, el grupo 5, cuya respuesta se ilustra en la Figura 12, junto con otros dos grupos, acertó al identificar que las distancias entre el eje y los puntos original y reflejado permanecen constantes, explicitándolo en el plano cartesiano. Este nivel de entendimiento indica que han alcanzado el nivel 2 de análisis en el Modelo de Van Hiele, pues aplicó de manera consciente propiedades fundamentales de la simetría axial. Para apoyar a los dos grupos que enfrentaron dificultades en reflejar correctamente el punto Q respecto a las rectas dadas, se fomentó el uso de GeoGebra en la fase de institucionalización, reforzando el concepto de equidistancia entre la línea y los puntos original y reflejado.

Además, en su respuesta a la pregunta C, el grupo 5 mostró su habilidad para calcular con precisión las coordenadas de un punto reflejado R' y vincular este cálculo a la simetría respecto al origen de dicho punto. Fueron los únicos, en la discusión plenaria de la fase de institucionalización y en el desarrollo de la hoja de actividades, en señalar que una doble simetría sucesiva alrededor de los ejes cartesianos es equivalente a una rotación de 180° con centro en el origen.

No obstante, el hecho de que los otros 4 grupos no lograran establecer esta relación por sí mismos, subrayó la necesidad de una enseñanza más enfocada en las simetrías centrales, en la que se utilice una actividad independiente con situaciones de acción similares a las de la actividad 1, tal como concluyó junto con las y los estudiantes en la retroalimentación del *ticket* de salida. La reenseñanza en la clase 9 de modelado y ejercitación abordó las relaciones entre rotaciones de 180° con centro en el origen y simetrías con respecto al origen, utilizando métodos tanto gráficos como algebraicos. Se recurrió a la doble reflexión en relación con los ejes, complementada con soporte algebraico, tal como se introdujo en la primera actividad de la hoja de actividades N°4. Esta metodología didáctica facilitó a los estudiantes la visualización y comprensión de la naturaleza de la simetría central y su relación con una rotación de 180° alrededor del origen del plano cartesiano.

Figura 12

Respuestas del grupo 5 en la actividad 2 de la hoja de actividades N°4



4.1.8. Clase 8: simetrías. Ticket de salida

El *ticket* de salida de la octava clase incluyó tres preguntas enfocadas en evaluar la capacidad de las y los estudiantes para realizar reflexiones de puntos o figuras en relación con ejes específicos, tanto visual como algebraicamente, y para determinar el eje de simetría entre una figura y su imagen.

Tabla 5

Resultados ticket de salida – clase 8

Pregunta 1 (n=20)		
Si un punto $P(1, -3)$ lo reflejas en torno al eje Y obteniendo el punto P' , y luego le aplicas una simetría a P' , pero esta vez en torno al eje X obteniendo el punto P'' , ¿cuáles son las coordenadas de los puntos P' y P'' ?		
	Si	No
El estudiante determina correctamente que las coordenadas de P' son $(-1, -3)$.	70%	30%
	14	6
El estudiante determina correctamente que las coordenadas de P'' son $(-1, 3)$.	70%	30%
	14	6
Pregunta 2 (n=20)		
¿Cuál es el eje de simetría de la reflexión mostrada en la figura?		
	Si	No
El estudiante identifica correctamente $x = 4$ como el eje de simetría.	90%	10%
	18	2
El estudiante demuestra habilidad para identificar visualmente el eje de simetría en un plano cartesiano.	70%	30%
	14	6
Pregunta 3 (n=20)		
¿Cuál es el reflejo del punto $(8, 4)$ respecto al eje de simetría encontrado en la pregunta 2?		
	Si	No
El estudiante calcula correctamente el reflejo del punto $(8, 4)$ como $(0, 4)$.	70%	30%
	14	6

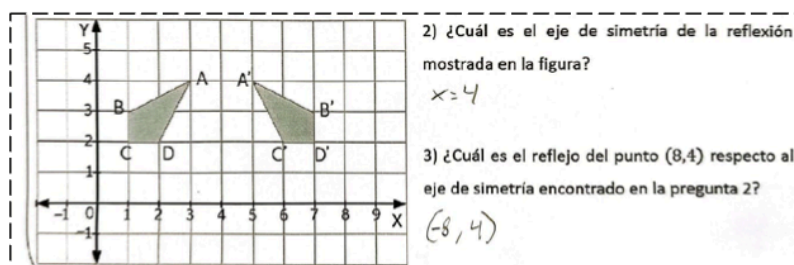
Los resultados, documentados en la Tabla 5, muestran que todos los estudiantes que completaron el *ticket* de salida lograron con éxito calcular las coordenadas de un punto después de reflejarlo sucesivamente en los ejes Y y X. Este logro es notable, ya que lo alcanzaron sin depender de representaciones gráficas, sino aplicando transformaciones aprendidas en las actividades 1 y 2 de la hoja de actividades N°4 y las

reenseñanzas correspondientes. Además, el curso demostró cómo identificar el eje de simetría entre una figura y su imagen y utilizó esta comprensión para reflejar otro punto en relación con dicho eje.

Sin embargo, se observó un error recurrente en las respuestas a las preguntas 2 y 3, en que seis estudiantes de 20 confundieron la reflexión relacionada con el eje identificado en la pregunta 2 con una reflexión respecto al eje Y, pues aplicaron incorrectamente las transformaciones enseñadas. La respuesta del estudiante 11, ilustrada en la Figura 13, ejemplifica este error. Aunque identificó correctamente la representación algebraica del eje de simetría entre los polígonos reflejados, su cálculo del reflejo del punto (8,4) no correspondía a la reflexión correcta.

Figura 13

Respuestas pregunta 2 de estudiante 11 en el ticket de salida de la clase 8



4.2 Reflexión del proceso de implementación y propuestas de mejora

El diseño, implementación y evaluación de la secuencia de clases descrita en este artículo posibilita la reflexión en torno a sus fortalezas, dificultades y desafíos. Estas reflexiones son fundamentales para proponer mejoras en la práctica docente futura. Estas consideraciones son resultado de aplicar los conocimientos adquiridos durante la formación académica, así como las competencias desarrolladas de acuerdo con el perfil de egreso de la carrera de pedagogía para profesionales de la Universidad Alberto Hurtado (2023), sumado a la experiencia profesional adquirida a lo largo del proceso.

El diagnóstico inicial reveló dos barreras principales en el aprendizaje matemático de los estudiantes: la falta de confianza en su habilidad para abordar esta materia y en su capacidad para resolver problemas matemáticos. Al comienzo de la secuencia de clases, se notó que algunos estudiantes, dudando de sus capacidades, evitaban participar o contribuir en las actividades grupales, temerosos de cometer errores y enfrentar el ridículo o la desaprobación. Durante las fases de validación e institucionalización, se observó una dinámica desigual en el trabajo grupal. Algunos estudiantes dominaban el proceso, formulando respuestas sin consultar a sus compañeros, mientras que otros compartían sus ideas solo tras recibir la aprobación de los más “aventajados” o del profesor. En las discusiones plenarias, solo unos pocos grupos dominaban el diálogo, mientras que otros simplemente asentían sin explicar su acuerdo o desacuerdo, a pesar de tener respuestas diferentes en sus trabajos.

Los ejercicios de metacognición revelaron que muchos estudiantes temían participar por miedo a estar equivocados, por no saber cómo expresarse correctamente o por ansiedad ante la exposición pública debido a experiencias negativas previas. A lo largo de las clases, se implementó estrategias de retroalimentación positiva, enfocándose en valorar los aportes y esfuerzos de los estudiantes, y ofreciendo apoyo adicional a aquellos con dificultades de aprendizaje. Se enfatizó que todas las respuestas son valiosas para el proceso de aprendizaje y que el error es una oportunidad para reflexionar y mejorar. Estos esfuerzos tuvieron un impacto positivo, con muchos estudiantes empezando a expresar abiertamente sus dificultades y a argumentar sus estrategias de resolución. Esto permitió diseñar actividades compensatorias para abordar deficiencias de aprendizaje y habilidades matemáticas. Sin embargo, persistió la necesidad de validación previa de las respuestas por parte de los estudiantes antes de compartirlas. Para el futuro, se propone fortalecer la confianza en el aula, creando un entorno en que los aportes de los estudiantes sean valorados y

sus respuestas, correctas o no, sean vistas como fundamentales para el aprendizaje colectivo. La práctica de una retroalimentación formativa constante, su enseñanza y aplicación sistemática, así como el seguimiento de los avances, son clave para fomentar una cultura de aprendizaje colectivo y saludable.

Durante las clases centradas en vectores y traslaciones, los estudiantes tuvieron dificultades tanto en describir movimientos mediante vectores como en identificar puntos en el plano cartesiano. Para abordar estas dificultades, se llevó a cabo aclaraciones y reenseñanzas, lo que resultó en una mejora tanto en la comprensión de los estudiantes como en el logro de los objetivos de aprendizaje relacionados con vectores y traslaciones. Esta mejora se evidencia en los resultados de aprendizaje presentados en el Anexo B.3 y en el alcance del Nivel 3 del Modelo de Van Hiele por la mayoría de los estudiantes, como se reporta en la prueba global de geometría tres semanas después de concluir la secuencia didáctica (ver Anexo B.10). Sin embargo, estos avances también subrayan la importancia de reforzar los conocimientos previos de los estudiantes. De cara a futuras prácticas educativas, se recomienda implementar clases preliminares que se centren en fortalecer la comprensión de los fundamentos de vectores y puntos en el plano cartesiano. Esto podría implicar la introducción de clases instructivas, basadas en el Modelo de Van Hiele, que incorporen ejercicios visuales e interactivos. Estos ejercicios estarían diseñados para permitir que los estudiantes exploren estos conceptos de manera más tangible y práctica antes de abordar una introducción a las traslaciones a través de una situación didáctica de interés escolar.

En las clases centradas en rotaciones, los estudiantes experimentaron dificultades tanto en el manejo de herramientas como compás y transportador como en la comprensión de la rotación de figuras en el plano, particularmente cuando no contaban con soporte visual. Para abordar estos desafíos, se implementó reenseñanzas prácticas, complementadas con el uso del software GeoGebra para realizar demostraciones visuales. Estas técnicas demostraron ser efectivas, lo que se reflejó en el logro de los objetivos de aprendizaje en el control sumativo N°2 (ver Anexo B.6) y en el alcance del nivel 3 en el Modelo de Van Hiele por parte de algunos estudiantes, según se detalla en la prueba global de geometría (ver Anexo B.10). No obstante, esta situación también resalta la importancia de desarrollar de manera regular habilidades prácticas en los estudiantes y de diseñar actividades con una progresión en dificultad desde lo concreto hasta lo simbólico. Este enfoque permitiría evolucionar desde el uso de compás y transportador hasta actividades que requieran una comprensión y aplicación más profunda de las relaciones algebraicas de las rotaciones, en particular aquellas con centro en el origen y ángulos notables. Para facilitar esta progresión, se podría emplear el diseño de actividades fundamentadas en la componente instructiva del Modelo de Van Hiele. Este enfoque metodológico ayudaría a los estudiantes a realizar una transición adecuada entre los diferentes niveles de comprensión, apropiación del vocabulario y notación, y comprensión de las relaciones algebraicas inherentes a la isometría en estudio.

En relación con la enseñanza de las simetrías, se notó que, aunque los estudiantes lograron una comprensión adecuada de las simetrías axiales, faltaron actividades específicas centradas en la simetría central. Esta omisión limitó la capacidad de los estudiantes para explorar y comprender plenamente este tipo de reflexión. Sin embargo, en la clase de modelamiento y ejercitación, utilizando un soporte gráfico basado en GeoGebra, los estudiantes lograron comprender las simetrías centrales, lo que se verificó en los resultados de aprendizaje del control sumativo N°3 (ver Anexo B.9) y en el logro del nivel 2 del Modelo de Van Hiele por la gran mayoría de los estudiantes en la prueba global de geometría (ver Anexo B.10). Para futuras prácticas docentes, se propone el desarrollo de actividades detalladas centradas en la simetría central, utilizando situaciones relevantes y atractivas que capten el interés de los estudiantes. Estas actividades podrían incluir ejemplos del mundo real, aplicaciones en arte y diseño, o problemas prácticos que requieran el uso de la simetría central para su resolución. Además, se identificó la necesidad de mejorar la transición entre las rotaciones y las simetrías. Se propone reconsiderar el orden y el diseño de las actividades en la clase de simetrías, comenzando con simetrías centrales y luego avanzando hacia las simetrías axiales para ayudar a los estudiantes a establecer conexiones lógicas entre los conceptos y comprender mejor la relación entre las rotaciones de 180° con centro en el origen y las simetrías centrales con respecto a este mismo punto.

La implementación de la secuencia de clases, centrada en vectores, traslaciones, rotaciones y simetrías, resalta desafíos significativos en el plano didáctico y disciplinar. Uno de los retos más prominentes fue la dificultad de los estudiantes para comprender la redacción del contexto, las instrucciones y las preguntas en las hojas de actividades. Esta situación subrayó la importancia de diseñar materiales didácticos claros y accesibles. La redacción de las preguntas a veces resultó ser un obstáculo didáctico, lo que condujo a múltiples aclaraciones tanto al inicio de las clases como durante las discusiones grupales y plenarias. Para mejorar este aspecto, se propone un proceso de revisión y validación más riguroso de los materiales educativos, involucrando a otros docentes de matemáticas, profesores de otras disciplinas, estudiantes de niveles inferiores y personas ajenas al ámbito educativo. Esta colaboración interdisciplinar podría ajustar la redacción de las preguntas para asegurar su comprensión universal y eliminar barreras innecesarias para el aprendizaje.

Otro aspecto clave fue la transición didáctica entre diferentes isometrías en estudio. La transición de vectores a traslaciones, por ejemplo, resultó ser particularmente efectiva, ya que las actividades de la hoja de actividades N°1 y N°2 se diseñaron para construir sobre el conocimiento previo de los estudiantes. Esta secuencia no solo contribuyó al logro de los objetivos de aprendizaje, sino que también influyó positivamente en la percepción de los estudiantes, como se evidenció en los ejercicios de metacognición realizados durante estas clases. Para futuras sesiones, es fundamental mantener y optimizar esta estrategia, sobre todo en la transición entre las rotaciones y simetrías, como la coherencia global entre todas las isometrías con la inclusión del OA 14 sobre la composición de transformaciones isométricas (Mineduc, 2016a), lo que garantizaría que cada nuevo concepto se fundamente en el anterior. Esta práctica no solo facilitaría una comprensión más profunda, sino que también promovería la retención del conocimiento a largo plazo. En este contexto, la integración de la componente instructiva del Modelo de Van Hiele en el diseño de las clases desempeñaría un papel fundamental. Este enfoque metodológico puede enriquecer y favorecer el aprendizaje geométrico, guiando a los estudiantes a través de niveles coherentes de comprensión que van desde lo concreto y pictórico hasta lo simbólico. Al aplicar este modelo, se facilitaría la transición didáctica entre las distintas isometrías, lo que a su vez apoyaría el proceso de aprendizaje significativo. La correcta implementación de este modelo junto con la Teoría de situaciones didácticas aseguraría que los conceptos geométricos no solo se enseñen, sino que se comprendan de manera integral y se apliquen efectivamente en diferentes contextos.

Conclusiones

En esta serie de clases sobre transformaciones isométricas en el plano cartesiano para estudiantes de octavo básico, se implementó un enfoque pedagógico y didáctico integrador. Este enfoque combinó la Teoría de Situaciones Didácticas, el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, el Aprendizaje Significativo de Ausubel y la Evaluación para el Aprendizaje. El propósito principal fue no solo fomentar la comprensión geométrica de los estudiantes, sino también incrementar su interés y confianza en las matemáticas, así como en sus propias habilidades de resolución de problemas. No obstante, la integración de estas diversas teorías y prácticas pedagógicas planteó desafíos, particularmente en términos de coherencia metodológica y adaptación a los variados estilos de aprendizaje de los estudiantes. Estos retos resaltan la importancia de una formación docente continua y reflexión pedagógica para manejar con eficacia la complejidad de este y otros enfoques integrados.

Continuando con la evaluación de los resultados, se observó una mejora en las habilidades geométricas de los estudiantes. Esta mejora se manifestó en su capacidad para aplicar adecuadamente la notación y el vocabulario geométrico, y en su habilidad para establecer y comunicar relaciones algebraicas en transformaciones de traslación, rotación y reflexión durante las evaluaciones. A pesar de estos avances, la sostenibilidad de estas mejoras y su aplicabilidad en diferentes contextos educativos son cuestiones que requieren una consideración detallada. Resulta esencial investigar cómo este enfoque puede ser adaptado a distintos entornos escolares y culturas de aprendizaje, y determinar la viabilidad de mantener y reproducir sus resultados a largo plazo.

Además, aunque el enfoque implementado parece haber fomentado un mayor interés y confianza en las matemáticas entre los estudiantes, es esencial evaluar cómo estos factores subjetivos influyen en su rendimiento académico global, abarcando tanto las matemáticas como otras asignaturas. Aunque la confianza y el interés son valiosos dentro de los objetivos actitudinales, no necesariamente garantizan una comprensión matemática profunda y competente. Por ello, resulta crucial investigar en qué medida estos elementos contribuyen a un aprendizaje efectivo en matemáticas y al desarrollo de habilidades y razonamientos en la geometría.

Asimismo, es importante enfocarse en el impacto de este enfoque en distintos grupos de estudiantes. Resulta vital considerar cómo afecta a aquellos que, por diversas razones, podrían enfrentar desafíos con métodos de enseñanza innovadores o no convencionales, o que tienen estilos de aprendizaje distintos. La identificación y el desarrollo de estrategias para adaptar este enfoque pedagógico a una amplia gama de necesidades educativas pueden aumentar significativamente la inclusividad y eficacia del programa. La adaptación y personalización de la secuencia de clases en futuras implementaciones son clave para asegurar que todos los estudiantes se beneficien de manera equitativa y efectiva.

En síntesis, este trabajo de titulación revela un enfoque pedagógico innovador, con potencial para optimizar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, enfocado específicamente en el fomento de habilidades de pensamiento geométrico. Es crucial, sin embargo, mantener un enfoque crítico y objetivo, reconociendo las limitaciones inherentes a la complejidad de su implementación, la durabilidad a largo plazo de los resultados y la flexibilidad para adaptar estas estrategias a una variedad de entornos educativos. La continua revisión y ajuste de estas metodologías, complementadas con una capacitación y desarrollo profesional constante del cuerpo docente, son indispensables para garantizar la eficacia de este y otros enfoques multidimensionales y potenciar su impacto significativo en el desarrollo académico, personal y social de las y los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Agencia de Calidad de la Educación. (2022). *Informe de Resultados Educativos Colegio Alemán Sankt Thomas Morus*. <https://www.agenciaeducacion.cl/>
- Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Editorial Síntesis.
- Arancibia, V., Herrera, P. & Strasser, K. (2008). Teorías psicológicas aplicadas a la educación: Teorías cognitivas del aprendizaje. En *Manual de psicología educacional* (6ª ed., pp. 83–122). Ediciones UC.
- Aravena, M. & Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 139–178. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1621>
- Aray Andrade, C. A., Párraga Quijano, O. F. & Raúl, C. M. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, 4(1), 20–31. <https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1622>
- Ausubel, D. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Paidós.
- Ausubel, D., Novak, J. & Hanesian, H. (1978). Affective and Social Factors in Learning. En *Educational psychology: a cognitive view* (2ª ed., pp. 397–431). Editorial Holt, Rinehart and Winston.
- Bandura, A. (1997). Cognitive Functioning. En *Self-efficacy: The exercise of control* (pp. 212–258). Editorial W H Freeman/Times Books/ Henry Holt & Co.
- Becerra, C. (2015). *Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las isometrías en el plano cartesiano utilizando la resolución de problemas* [Seminario de Titulación, Universidad Alberto Hurtado]. <https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/24505>
- Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *International Journal of Phytoremediation*, 21(1), 7–74. <https://doi.org/10.1080/0969595980050102>
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (D. Fregona (traductor), Ed.). Editorial Libros del Zorzal.
- Burgos, M., Gutiérrez, C. & Lillo, F. (2018). *Una secuencia de enseñanza y aprendizaje para el Principio multiplicativo en la resolución de problemas* [Trabajo de Título, Universidad Alberto Hurtado]. <https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/26651>
- Chamorro, M. del C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas* (J. L. Posadas, Ed.). Editorial Pearson Prentice Hall.
- Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de Investigación y Educación Matemática*, 1(2). <http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/teoria%20de%20las%20situaciones%20didacticas.pdf>
- Chuaqui, M. & Riera, G. (2012). Transformaciones en el Plano Euclídeo. En P. Felmer & S. Martínez (Eds.), *Transformaciones en geometría: euclidiana y no euclidiana* (pp. 19–44). Editorial ebooks Patagonia. <https://elibro.net/es/ereader/bibliotecasuc/68437>

- Coll, C., Palacios, J. & Marchesi, Á. (2014). El aprendizaje significativo y la teoría de la asimilación. En E. Martín & I. Solé (Eds.), *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar* (2ª ed., pp. 89–116). Editorial Alianza.
- Díaz-Barriga, F. & Hernández, G. (2004). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista* (2ª ed.). Editorial McGraw-Hill.
- DSSTM. (2021). *Proyecto Educativo Institucional*. <https://dsmorus.cl/protocolos/>
- DSSTM. (2022). *Anuario 2022*.
- Estruch, V., Gregori, V. & Roig, B. (2018). Semejanza en R2: Isometrías. En *Geometría euclídea* (pp. 63–88). Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia. <https://elibro.net/es/ereader/bibliotecasuc/57468>
- Fenstermacher, G. D. & Soltis, J. F. (2007). El enfoque del terapeuta. En *Enfoques de la Enseñanza* (pp. 55–78). Editorial Amorrortu.
- Fernández, C. (2007). Isometría en nuestro entorno. *Ensayos*, 22, 59–80. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2591547>
- Foong, P. Y. (2014). Resolución de problemas en matemática. En P. Y. Lee (Ed.), *La enseñanza de la matemática en educación básica. Un libro de recursos* (pp. 65–94). Academia Chilena de Ciencias.
- Fouz, F. & De Donosti, B. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. En *Un paseo por la geometría* (pp. 67–81). <http://www.xtec.cat/~rnolla/Sangaku/SangWEB/PDF/PG-04-05-fouz.pdf>
- Goncalves, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, 1(27), 83–98. <http://servicio.bc.uc.edu.ve/educacion/revista/volIn27/27-5.pdf>
- González, C., Inglés, C. J., Vicent, M., Lagos-San Martín, N., Sanmartín, R. & García-Fernández, J. M. (2016). Diferencias en ansiedad escolar y autoconcepto en adolescentes chilenos. *Acta de Investigación Psicológica*, 6(3), 2509–2515. <https://doi.org/10.1016/j.aiprr.2016.08.002>
- Gurung, R. A. R. & Stone, A. M. (2020). *You Can't Always Get What You Want and It Hurts: Learning During the Pandemic*. <https://psyarxiv.com/wqdx8>
- Hattie, J. & Timperley, H. (2007). El poder de la Retroalimentación. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17390>
- Hollebrands, K. F. (2003). High school student's understanding of geometric transformation in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55–72. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(03\)00004-X](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00004-X)
- Ibarra-Sáiz, M. S. & Rodríguez-Gómez, G. (2019). Una evaluación como aprendizaje. En J. Paricio Royo, A. Fernández, & I. Fernández (Eds.), *Cartografía de la buena docencia universitaria. Un marco para el desarrollo del profesorado basado en la investigación* (pp. 175–196). Editorial Narcea. https://www.researchgate.net/publication/337290579_Una_evaluacion_como_aprendizaje
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* [Tesis doctoral, Universitat de Valencia]. <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660–675. <https://www.jstor.org/stable/749578>
- Lima, E. L. (1996). Isometrias no plano. En *Isometrias* (pp. 13–29). Sociedade Brasileira de Matemática. <https://www.ime.unicamp.br/~hqsaearp/Disciplinas/GeomModerna/Elon%20-%20isometrias.pdf>

- Manterola, M. (2003). Los procesos mentales y el aprendizaje: el enfoque cognoscitivo. En *Psicología educativa. Conexiones con la sala de clases* (pp. 111–181). Ediciones UCSH.
- Martínez, J. (2020). Salud mental en estudiantes chilenos durante confinamiento por Covid-19: revisión bibliográfica. *Revista Educación las Américas*, 10(2), 265–276. <https://doi.org/10.35811/rea.v10i2.126>
- Mineduc. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio* (Unidad de Currículum y Evaluación, Ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34949_Bases.pdf
- Mineduc. (2016a). *Programa de Estudio Octavo básico. Matemática* (Unidad de Currículum y Evaluación, Ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18983_programa.pdf
- Mineduc. (2016b). *Programa de Estudio Séptimo básico. Matemática* (Unidad de Currículum y Evaluación, Ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-18982_programa.pdf
- Mineduc. (2017). *Programa de Estudio Primero medio. Matemática* (Unidad de Currículum y Evaluación, Ed.). https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34359_programa.pdf
- Moreira, M. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. En M. Moreira, M. Caballero, & M. Rodríguez (Eds.), *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo* (pp. 19–44). https://www.aprendizajesignificativo.com/wp-content/uploads/2022/03/Articulo_El_aprendizaje_significativo_concepto_subyacente.pdf
- Moreno, T. (2006). *Evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje: reinventar la evaluación en el aula*. Unidad Cuajimalpa.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Consejo Nacional de Profesores de Matemática. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/17719>
- Panizza, M., Bartolomé, O., Broitman, C., Fregona, D., Itzcovich, H., Quaranta, M. E., Ressa de Moreno, B., Saiz, I. E., Tarasow, P. & Wolman, S. (2009). Conceptos básicos de la Teoría de Situaciones Didácticas. En *Enseñar matemática en el nivel inicial y el primer ciclo de la EGB* (pp. 59–71). Editorial Paidós.
- Restrepo-Ochoa, J. F., Gualdrón-Pinto, E. & Ávila-Ascanio, L. F. (2023). Improving the learning of geometric proportionality using van Hiele's model, mathematical visualization, and GeoGebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(9). <https://doi.org/10.29333/ejmste/13500>
- Rogers, C. & Freiberg, H. J. (1996). La relación interpersonal en la facilitación del aprendizaje. En *Libertad y creatividad en la educación* (3ª ed., pp. 183–200). Editorial Paidós.
- Sanmartí, N. (2007). *10 Ideas Clave. Evaluar para aprender*. Editorial Graó.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics* (Reprint). <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1177/002205741619600202>
- Shabab, C. R. (2023). Understanding mathematics anxiety: loss aversion and student engagement. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrad008>
- Shepard, L. (2006). La evaluación en el aula. En R. Brennan (Ed.), *Educational Measurement* (4ª ed., pp. 623–646). Editorial ACE/ Praeger Westport.
- Universidad Alberto Hurtado. (2023). *Perfil de Egreso Pedagogía para Profesionales*. UAH.
- Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría*. University of Utrecht.

- Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* [Traducción al inglés en Fuys, Geddes y Tischler, 1984]. University of Utrecht.
- Vidal, R. (2008). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones*. <https://repositorio.uahurtado.cl/handle/11242/8567>
- Villalta, M., Martinic, S. & Guzmán, M. (2011). Elementos de la interacción didáctica en la sala de clases que contribuyen al aprendizaje en contexto social vulnerable. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 16(51), 1137–1158. <https://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v16n51/v16n51a6.pdf>
- Zepeda, S. (2017). La retroalimentación efectiva y su potencial para mejorar el aprendizaje. En C. Förster (Ed.), *El poder de la evaluación en el aula: Mejores decisiones para promover aprendizajes* (pp. 121–146). Ediciones UC.

ANEXOS

ANEXO A.1: planificaciones e instrumentos micro unidad de vectores

Planificación clase 1: acceder al [vínculo](#).

Hoja de actividades N°1, *ticket* de salida y resumen de la clase 1: acceder al [vínculo](#).

ANEXO A.2: planificaciones e instrumentos micro unidad de traslaciones

En la planificación e instrumentos de la clase 2:

- Planificación: acceder al [vínculo](#).
- Hoja de actividades N°2, *ticket* de salida y resumen: acceder al [vínculo](#).

Planificación y guía de ejercitación clase 3: acceder al [vínculo](#).

Planificación y control sumativo clase 4: acceder al [vínculo](#).

ANEXO A.3: planificaciones e instrumentos micro unidad de rotaciones

Para acceder a la planificación e instrumentos de la clase 5:

- Planificación: acceder al [vínculo](#).
- Hoja de actividades N°3, *ticket* de salida y resumen: acceder al [vínculo](#).

Planificación y guía de ejercitación clase 6: acceder al [vínculo](#).

Planificación y control sumativo clase 7: acceder al [vínculo](#).

ANEXO A.4: planificaciones e instrumentos micro unidad de simetrías

Para acceder a la planificación e instrumentos de la clase 8:

- Planificación: acceder al [vínculo](#).
- Hoja de actividades N°4, *ticket* de salida y resumen: acceder al [vínculo](#).

Planificación y guía de ejercitación clase 9: acceder al [vínculo](#).

Planificación y control sumativo clase 10: acceder al [vínculo](#).

ANEXO B.1: clase 1. Actividad 2 – hoja de actividades N°1: vectores

Resultados segunda actividad hoja de actividades N°1 – clase 1.

Pregunta A (n=5)		
¿Cuáles son las coordenadas del punto de partida (A) y del punto de llegada (B) a donde debe dirigirse el Perseverance?		
	Si	No
El grupo identifica correctamente las coordenadas del punto A como (13, 6) y del punto B como (11, 9) en el plano cartesiano.	100% (5 grupos)	
Pregunta B (n=5)		
¿Cómo describirían el movimiento del Perseverance desde A hasta B en el plano cartesiano? Piensen en términos de dirección y distancia.		
	Si	No
El grupo describe adecuadamente el movimiento del punto A al punto B en términos de dirección y distancia, reconociendo el desplazamiento a la izquierda y hacia arriba en el plano.	100% (5 grupos)	
Pregunta C (n=5)		
Encuentren una expresión matemática o algebraica para el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Esta expresión representará las instrucciones precisas para desplazar el Perseverance del punto A al punto B.		
	Si	No
El grupo formula correctamente el vector $\vec{v} = (-2, 3)$ que representa el desplazamiento del Perseverance de A a B.	100% (5 grupos)	

ANEXO B.2: clase 2. Actividad 1 – hoja de actividades N°2: traslaciones*Resultados primera actividad guía de aprendizaje – clase 2*

Pregunta A (n=6)		
¿Qué secuencia de movimientos debería seguir el robot Perseverance para posicionar su cámara PIXL de manera que esta coincida con las coordenadas de la muestra rocosa que aparenta estar mojada? Describan.		
	Si	No
El grupo identifica correctamente el punto de partida y el de destino en el plano.	100% (6 grupos)	
La descripción de los movimientos incluye la dirección correcta y la cantidad de espacios movidos	100% (6 grupos)	
Pregunta B (n=6)		
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A, B, C y D del Perseverance cuando llega a su nueva posición? Expliquen.		
	Si	No
El grupo calcula las nuevas coordenadas de todos los vértices sin errores.	83% (5 grupos)	17% (1 grupo)
Pregunta C (n=6)		
¿Qué observan en las coordenadas de los vértices A, B, C y D del robot Perseverance respecto a las nuevas que tiene en la posición de estudio de la muestra rocosa? Expliquen.		
	Si	No
El grupo observa que todos los vértices se han trasladado uniformemente.	83% (5 grupos)	17% (1 grupo)
Se reconoce y se explica la consistencia en la cantidad de espacios movidos horizontal y verticalmente.	83% (5 grupos)	17% (1 grupo)
Pregunta D (n=6)		
Con base en sus respuestas a las tres preguntas anteriores, ¿cómo pueden conectar estos movimientos con lo que han aprendido sobre vectores? Expliquen.		
	Si	No
Se identifica y se explica el vector de traslación basado en los movimientos realizados.	50% (3 grupos)	50% (3 grupos)
El grupo utiliza la terminología de vectores correctamente y en el contexto adecuado.	67% (4 grupos)	33% (2 grupos)

ANEXO B.3: clase 4. Control de Traslaciones

En la Tabla B.3 se detallan los resultados del control sobre traslaciones realizado en la cuarta clase, lo que incluyó cinco preguntas destinadas a evaluar de manera sumativa la habilidad de los estudiantes para ejecutar traslaciones en el plano cartesiano usando vectores dados y para determinar el vector entre la imagen y la preimagen de dos figuras trasladadas.

De acuerdo con los resultados, la mayoría de los estudiantes alcanzó un desempeño óptimo o satisfactorio en las primeras cuatro preguntas, lo que cumplió con el objetivo educativo de realizar traslaciones con vectores y determinar el vector correspondiente entre figuras trasladadas. Sin embargo, la quinta pregunta representó un desafío mayor, ya que además de requerir el uso preciso de la ecuación vectorial $A + \vec{w} = B$, los estudiantes debían establecer ecuaciones para cada coordenada y resolver un sistema de ecuaciones simple para calcular los valores de p y m y luego restarlos.

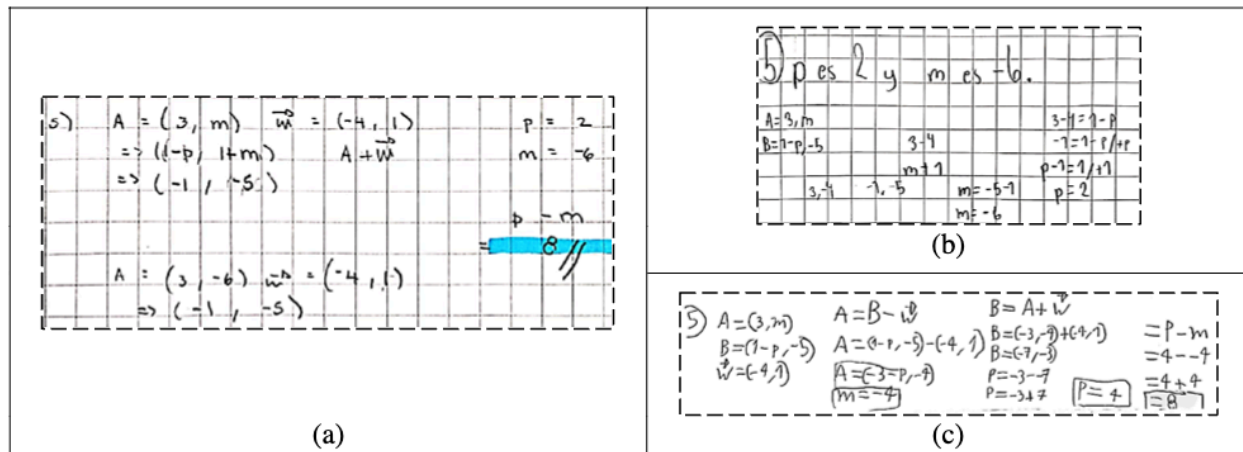
La respuesta de la estudiante 14 en la Figura B.3 es un claro ejemplo de su habilidad para analizar y procesar información matemática de manera efectiva. Demostró su competencia al interpretar los datos proporcionados, establecer la ecuación vectorial de traslación $A + \vec{w} = B$, igualar coordenadas para formar ecuaciones, y finalmente calcular y restar los valores de p y m para hallar la solución. Este proceso refleja una comprensión avanzada de las relaciones entre las coordenadas de un punto y su imagen después de una traslación, lo cual la sitúa en el nivel 3 de clasificación según el Modelo de Van Hiele.

En contraste, la estudiante 16, también en la Figura B.3, utilizó un enfoque diferente pero igualmente efectivo. Reconoció la información dada y estableció ecuaciones que le permitieron obtener los valores de p y m mediante un método aritmético en lugar de uno puramente algebraico. Aunque no completó la resta final, posiblemente debido a limitaciones de tiempo o a un error en las operaciones básicas, su metodología indica una comprensión conceptual sólida que también se alinea con el nivel 3 del Modelo de Van Hiele.

De manera similar, el estudiante 18, representado en la misma figura, alcanzó la solución correcta mediante un enfoque puramente algebraico, lo que demuestra habilidad para trabajar con las relaciones y las ecuaciones de traslación sin la necesidad de apoyo visual en forma de figuras o traslaciones concretas, característica del nivel 3 del Modelo de Van Hiele.

Figura B.3

Respuestas de algunos estudiantes en el control N°1



Nota. (a) Respuesta estudiante 14, (b) respuesta estudiante 16 y (c) respuesta estudiante 18.

Tabla B.3*Resultados control de traslaciones – clase 4*

Pregunta 1 (n=19)				
Tienes el punto $A = (4, -5)$ y te interesa trasladarlo nueve unidades a la derecha y luego, siete unidades hacia abajo para obtener el punto A' . ¿Cuál será el punto A' ?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante realiza correctamente la suma vectorial, aplicando la traslación a A mediante la operación $A + \vec{v} = A'$ y encuentra la ubicación exacta de $A' = (13, -12)$.	El estudiante aplica la suma vectorial con un pequeño error numérico pero demuestra comprensión del proceso de traslación.	El estudiante entiende el concepto de traslación pero comete errores en la operación que resultan en una localización incorrecta de A' .	El estudiante no logra aplicar la suma vectorial para encontrar A' y no muestra comprensión de la traslación.
Porcentajes de logro obtenidos	70% (13 estudiantes)	15% (3 estudiantes)	10% (2 estudiantes)	5% (1 estudiante)
Pregunta 2 (n=19)				
Si tienes un punto $P = (6, -6)$ y lo trasladas hasta llegar al punto $P' = (8, -10)$. ¿Cuál sería el vector que describe ese movimiento?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante determina con precisión el vector de traslación $\vec{v} = (2, -4)$ restando P de P' y representa este vector en forma algebraica correctamente.	El estudiante identifica el vector de traslación con un error menor en la resta de puntos pero entiende el concepto.	El estudiante tiene una idea general del vector de traslación pero comete errores significativos en su cálculo algebraico.	El estudiante no logra determinar el vector de traslación ni representarlo algebraicamente.
Porcentajes de logro obtenidos	65% (12 estudiantes)	15% (3 estudiantes)	10% (2 estudiantes)	10% (2 estudiantes)
Pregunta 3 (n=19)				
Al punto $B = (4, -5)$ se le aplica una traslación, obteniéndose el punto $B' = (7, 4)$. Si a otro punto $C = (-8, -6)$ se le aplica la misma traslación obteniendo el punto C' . ¿Cuál será el punto C' ?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante aplica correctamente la misma traslación que lleva B a B' ($\vec{v} = (3, 9)$) para calcular C' , usando la suma vectorial y	El estudiante realiza la traslación de C a C' con un pequeño error pero demuestra comprensión del proceso.	El estudiante reconoce la necesidad de aplicar una traslación pero se equivoca al sumar los vectores.	El estudiante no logra realizar la traslación de C a C' correctamente y muestra confusión sobre la suma de vectores.

	encuentra la ubicación exacta de $C' = (-5, 3)$.			
Porcentajes de logro obtenidos	75% (14 estudiantes)		15% (3 estudiantes)	10% (2 estudiantes)
Pregunta 4 (n=19)				
El gráfico representa la traslación del triángulo ABC según un vector \vec{u} , obteniéndose el triángulo $A'B'C'$. ¿Cuáles son las coordenadas de ese vector \vec{u} ? Dibújalo en el plano cartesiano de la figura.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante identifica y grafica con precisión el vector de traslación $\vec{u} = (5, 3)$, utilizando la resta de coordenadas entre los puntos correspondientes de los triángulos.	El estudiante encuentra aproximadamente el vector \vec{u} y realiza una representación gráfica cercana a la correcta.	El estudiante entiende que debe encontrar un vector pero comete errores en la resta de coordenadas o en la representación gráfica.	El estudiante no logra identificar ni graficar correctamente el vector de traslación.
Porcentajes de logro obtenidos	100% (19 estudiantes)			
Pregunta 5 (n=19)				
Si el punto $A = (3, m)$ se traslada según el vector $\vec{w} = (-4, 1)$, resultando en el punto $B = (1 - p, -5)$, ¿cuánto es $p - m$?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante resuelve con precisión la ecuación vectorial $A + \vec{w} = B$, encuentra los valores exactos de $p = 2$ y $m = -6$, y calcula correctamente $p - m = 8$.	El estudiante resuelve la ecuación con pequeños errores numéricos pero entiende el proceso de manipulación de vectores.	El estudiante establece la ecuación vectorial pero comete errores en su resolución que afectan la determinación de p y m .	El estudiante no logra resolver la ecuación vectorial ni calcular la diferencia $p - m$.
Porcentajes de logro obtenidos	35% (6 estudiantes)	15% (3 estudiantes)	20% (4 estudiantes)	30% (6 estudiantes)

ANEXO B.4: clase 5. Actividad 1 – hoja de actividades N°3

Resultados primera actividad hoja de actividades N°3 – clase 5

Pregunta 1 (n=11)				
¿Alrededor de cuál de los puntos P, Q, R o S debería girar el Perseverance para moverse del punto A al punto B?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo identifica correctamente que el Perseverance debe rotar alrededor del punto P y proporcionan una justificación clara basada en la igualdad de distancias desde A a B.	El grupo elige el punto P como centro de rotación pero la justificación no es completamente clara o está parcialmente completa.	El grupo identifica un punto de rotación diferente a P pero intentan justificar su elección o muestran confusión sobre cómo determinar el centro de rotación adecuado.	El grupo no logra identificar el punto de rotación correcto y no proporcionan una justificación válida para su elección.
Porcentajes de logro obtenidos	73% (8 grupos)	27% (3 grupos)		
Pregunta 2 (n=11)				
Una vez que elijan el punto o centro de rotación, ¿cuántos grados debería girar el Perseverance para llegar desde el punto A hasta el punto B?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo mide correctamente el ángulo de rotación como 209° en sentido antihorario o 151° en sentido horario y explican el proceso de medición con claridad.	El grupo encuentra un ángulo de rotación cercano al correcto pero cometen pequeños errores de medición o interpretación.	El grupo entiende que debe medir un ángulo pero se equivoca significativamente en la medición o en la interpretación del sentido de rotación.	El grupo no logra medir el ángulo de rotación correctamente y no muestran comprensión del proceso de medición de ángulos.
Porcentajes de logro obtenidos	18% (2 grupos)	55% (6 grupos)		27% (3 grupos)

ANEXO B.5: clase 2. Actividad 2 – hoja de actividades N°3*Resultados segunda actividad hoja de actividades N°3 – clase 5*

Pregunta A (n=8)				
¿En qué rango de ángulos tendría que estar el Perseverance para poder apuntar su láser al objeto misterioso? Justifiquen su respuesta.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo identifica y justifica correctamente el rango de ángulos entre 163° y 278° en sentido antihorario o entre 82° y 197° en sentido horario para apuntar el láser al objeto misterioso.	El grupo identifica un rango de ángulos cercano al correcto con una justificación parcial o con pequeños errores.	El grupo propone un rango de ángulos pero con errores significativos y una justificación incompleta o incorrecta.	El grupo no logra identificar un rango de ángulos adecuado ni proporcionar una justificación razonable.
Porcentajes de logro obtenidos	12.5% (1 grupo)	12.5% (1 grupo)	25% (2 grupos)	50% (4 grupos)
Pregunta B (n=8)				
Imaginen que el Perseverance gira 90° en sentido antihorario, ¿dónde estará después de esta rotación? Expliquen cómo llegarían a esa respuesta usando las coordenadas de los vértices C, D, E y F del robot.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo calcula y justifica correctamente las nuevas coordenadas del Perseverance tras una rotación de 90° en sentido antihorario, utilizando las coordenadas de los vértices C, D, E, y F.	El grupo realiza cálculos cercanos a las coordenadas correctas con una justificación que muestra comprensión pero con errores menores.	El grupo muestra confusión sobre cómo realizar la rotación y sus cálculos de coordenadas contienen errores significativos.	El grupo no logra calcular las nuevas coordenadas ni justificar el proceso de rotación correctamente.
Porcentajes de logro obtenidos	100% (8 grupos)			
Pregunta C (n=8)				
¿En qué ángulo se encontrarían los dos “Perseverances” frente a frente? Usen las coordenadas C, D, E y F de nuestro robot para explicar su razonamiento.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo identifica correctamente que una rotación de 180° posiciona a los dos Perseverance frente a frente y justifica correctamente usando	El grupo llega a la conclusión correcta de que los Perseverance estarían frente a frente pero la justificación y el	El grupo reconoce que se requiere una rotación pero se equivoca en la magnitud del ángulo o en la justificación.	El grupo no logra determinar el ángulo correcto ni proporciona una justificación válida.

	las coordenadas de los vértices.	uso de coordenadas son parcialmente correctos.		
Porcentajes de logro obtenidos	100% (8 grupos)			
Pregunta D (n=8) Si el Perseverance gira 270° en sentido antihorario, ¿podrá seguir apuntando su láser al otro robot? Usen las coordenadas de los vértices C, D, E y F de nuestro robot para justificar su respuesta.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo entiende y justifica correctamente que después de una rotación de 270° en sentido antihorario, el Perseverance puede seguir apuntando su láser al otro robot.	El grupo realiza la rotación de forma casi correcta y proporciona una justificación razonable pero con algunos errores.	El grupo intenta justificar la rotación pero con errores significativos en la comprensión o en la explicación.	El grupo no comprende cómo afecta la rotación de 270° al láser y no puede justificar si el láser puede seguir apuntando al otro robot.
Porcentajes de logro obtenidos	100% (8 grupos)			
Pregunta E (n=8) Ahora, después de resolver estas preguntas, ¿qué pueden decir sobre cómo cambian las coordenadas de una figura cuando gira en diferentes ángulos respecto al origen de coordenadas? Usen el lenguaje matemático para generalizar sus hallazgos.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo generaliza correctamente cómo las coordenadas de una figura cambian al girar en diferentes ángulos respecto al origen, utilizando lenguaje matemático adecuado.	El grupo ofrece una generalización parcialmente correcta con un uso adecuado pero incompleto del lenguaje matemático.	El grupo muestra un entendimiento básico de la rotación pero su generalización y uso del lenguaje matemático son inexactos o incompletos.	El grupo no logra generalizar los efectos de la rotación en las coordenadas ni utiliza correctamente el lenguaje matemático.
Porcentajes de logro obtenidos	25% (2 grupos)			75% (6 grupos)

ANEXO B.6: clase 7. Control de rotaciones

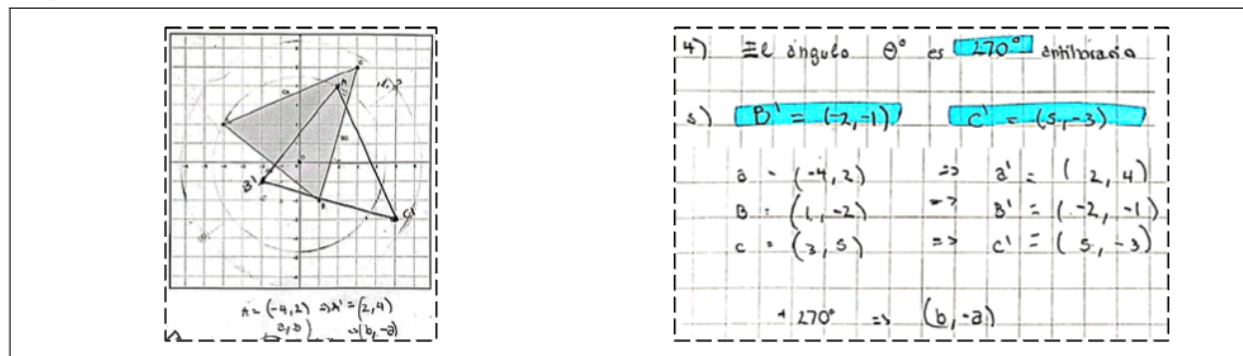
Los resultados del control de rotaciones realizado en la clase 7, que se presentan en la Tabla B.6, incluye cinco preguntas diseñadas para evaluar de forma sumativa la habilidad de los estudiantes de rotar puntos y figuras con centro en el origen y ángulos dados en el plano cartesiano, y para determinar el ángulo de rotación entre la imagen y la preimagen de dos puntos o figuras rotadas.

Los resultados de la Tabla B.6 indican que la mayoría de los estudiantes alcanzó un desempeño óptimo o satisfactorio en todas las preguntas del control, lo que refleja el logro de los objetivos de aprendizaje establecidos para este aspecto del temario. Esta mejora se evidencia en la superación de las dificultades previamente observadas por más de la mitad de los estudiantes en cuanto a la realización de rotaciones en el plano cartesiano, tanto con apoyo visual como de forma más abstracta, utilizando las transformaciones enseñadas desde la clase 5.

Un ejemplo destacado de esta progresión es la respuesta de la estudiante 13 a la pregunta 4, ilustrada en la Figura B.6. Ella demostró su comprensión al encontrar el ángulo de rotación que lleva el punto A al punto A' con centro en el origen, empleando transformaciones algebraicas. La estudiante reconoció que la transformación que “invierte los valores y calcula el opuesto de la coordenada a” corresponde a una rotación de 270° en sentido antihorario, o de -90° en sentido horario. Utilizó este entendimiento para determinar las coordenadas de las imágenes de los puntos B y C. Su trabajo refleja una transición entre los niveles 2 (análisis) 3 (clasificación) y 4 (deducción formal) del Modelo de Van Hiele, ya que no solo usó notación y vocabulario matemático adecuado para las rotaciones, sino que estableció relaciones algebraicas de una rotación para determinar el ángulo de rotación entre dos puntos o figuras rotadas con respecto al origen del plano.

Figura B.6

Respuestas de estudiante en el control N°2



Nota. Respuesta pregunta 4 de la estudiante 13.

Tabla B.6

Resultados Control de Rotaciones – clase 7

Pregunta 1 (n=19)				
Si el punto P = (5, 4) es rotado con centro en el origen en un ángulo de 180° , ¿cuáles son las coordenadas de P'?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante calcula correctamente las coordenadas de P' como	El estudiante realiza la rotación pero comete un pequeño error al	El estudiante muestra entendimiento parcial de la	El estudiante no entiende la rotación de 180° y no puede calcular

	$(-5, -4)$ después de una rotación de 180° .	determinar las coordenadas de P' .	rotación de 180° , pero sus coordenadas finales son incorrectas.	las coordenadas de P' correctamente.
Porcentajes de logro obtenidos	85% (16 estudiante)	5% (1 estudiante)	10% (2 estudiante)	
Pregunta 2 (n=19)				
El punto A es rotado en un ángulo de 90° con centro en el origen en sentido antihorario obteniendo el punto $A' = (-7, 4)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante encuentra correctamente las coordenadas de A como $(4, 7)$ antes de la rotación de 90° que da como resultado $A' = (-7, 4)$.	El estudiante tiene una idea aproximada de las coordenadas de A pero comete un error al calcularlas.	El estudiante entiende que debe revertir la rotación de 90° pero sus cálculos son incorrectos.	El estudiante no logra determinar las coordenadas originales de A.
Porcentajes de logro obtenidos	70% (13 estudiante)	10% (2 estudiante)	20% (4 estudiante)	
Pregunta 3 (n=8)				
Se rota el punto $R = (7, -3)$ en cierto ángulo con centro en el origen en sentido antihorario, y se obtuvo el punto $R' = (3, 7)$. Si al punto $B = (-9, 5)$ se le rota con centro en el origen en sentido antihorario en un mismo ángulo que se usó para rotar R, ¿cuáles serán las coordenadas de B' ?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante aplica correctamente la rotación de 90° en sentido antihorario al punto B y calcula las coordenadas de B' como $(-5, -9)$ con precisión.	El estudiante realiza la rotación pero comete un error menor al calcular las coordenadas de B' o en la determinación del ángulo de rotación para R' dado R.	El estudiante tiene problemas con el cálculo y sus coordenadas finales para B' son parcialmente correctas.	El estudiante no logra aplicar la rotación adecuadamente y sus coordenadas de B' son incorrectas.
Porcentajes de logro obtenidos	75% (14 estudiante)	5% (1 estudiante)	10% (2 estudiante)	10% (2 estudiante)
Pregunta 4 (n=8)				
El triángulo de la figura se rota con centro en el origen en un ángulo que llamaremos θ° en sentido antihorario. Después de la rotación, la nueva ubicación del vértice A será $A' = (2, 4)$. Basándote en esta información, contesta las preguntas 4 y 5. ¿Cuál es el ángulo θ° usado en la rotación?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente

Indicadores	El estudiante deduce correctamente el ángulo $\theta = 270^\circ$ o -90° de rotación basándose en la nueva ubicación de A' .	El estudiante propone un ángulo de rotación cercano al correcto pero no completamente preciso o no indica correctamente el sentido de la rotación.	El estudiante muestra confusión sobre cómo determinar el ángulo de rotación a partir de la ubicación de A' .	El estudiante no logra determinar el ángulo de rotación necesario para la nueva ubicación de A' .
Porcentajes de logro obtenidos	70% (13 estudiante)	20% (4 estudiante)	5% (1 estudiante)	5% (1 estudiante)
Pregunta 5 (n=8)				
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices B' y C' ?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El estudiante calcula con precisión las coordenadas de $B' = (-2, -1)$ y $C' = (5, -3)$ después de la rotación basándose en el ángulo θ° proporcionado.	El estudiante encuentra aproximadamente las coordenadas correctas de B' y C' con errores menores.	El estudiante realiza cálculos que conducen a coordenadas parcialmente correctas para B' y C' .	El estudiante no logra calcular las coordenadas de B' y C' después de la rotación.
Porcentajes de logro obtenidos	53% (10 estudiante)	26% (5 estudiante)	16% (3 estudiante)	5% (1 estudiante)

ANEXO B.7: clase 8. Actividad 1 – hoja de actividades N°4*Resultados primera actividad hoja de actividades N°4 – clase 8*

Pregunta A (n=7)				
¿Cuáles son las coordenadas del punto que representa la ubicación del robot Perseverance en todos los polígonos que encontraron?				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo identifica y calcula correctamente las coordenadas del punto que representa la ubicación del Perseverance en todos los cuadrantes tras las reflexiones sucesivas.	El grupo realiza la mayoría de las reflexiones correctamente pero cometen un error menor en una o más coordenadas.	El grupo tiene un entendimiento parcial de las reflexiones y calculan algunas coordenadas incorrectamente.	El grupo no logra identificar ni calcular las coordenadas correctas tras las reflexiones.
Porcentajes de logro obtenidos	100% (7 grupos)			
Pregunta B (n=7)				
¿Qué observan en las coordenadas del punto que representa la ubicación del Perseverance cuando cambian de cuadrante? Expliquen indicando el cambio en cada cuadrante tomando como referencia el polígono ABCDEF de la Figura 1.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo observa y explica con precisión cómo cambian las coordenadas al moverse de un cuadrante a otro, detallando los efectos de las reflexiones respecto a ambos ejes.	El grupo tiene una comprensión adecuada de los cambios en las coordenadas pero su explicación carece de detalle o tiene pequeñas inexactitudes.	El grupo muestra una comprensión parcial del efecto de las reflexiones en las coordenadas, con errores o confusiones significativas.	El grupo no entiende cómo las coordenadas cambian al reflejar los puntos a través de los ejes.
Porcentajes de logro obtenidos	29% (2 grupos)	57% (4 grupos)	14% (1 grupo)	
Pregunta C (n=7)				
Basándose en sus respuestas a las preguntas anteriores, ¿cómo podrían describir matemáticamente cómo podemos reflejar puntos respecto a los ejes coordenados.				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo describe matemáticamente las reflexiones respecto a los ejes X y Y con exactitud, utilizando la notación correcta y	El grupo proporciona una descripción matemática de las reflexiones que es mayormente	El grupo entiende el concepto de reflexión pero tiene dificultades para expresarlo matemáticamente	El grupo no logra describir matemáticamente el proceso de reflexión respecto a los ejes.

	explicando el concepto de simetría axial.	correcta, con pequeños errores en la notación o la conceptualización.	con claridad o precisión.	
Porcentajes de logro obtenidos	29% (2 grupos)	29% (2 grupos)	42% (3 grupos)	

ANEXO B.8: clase 8. Actividad 2 – hoja de actividades N°4

Resultados segunda actividad hoja de actividades N°4 – clase 8

Pregunta A (n=5)				
¿Cuáles son las coordenadas del punto (5, 3) si se refleja en torno al eje X? ¿Y en torno al eje Y? Expliquen usando el siguiente plano cartesiano:				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo comprende y aplica correctamente las reflexiones en torno a los ejes, obteniendo (5, -3) para la reflexión respecto al eje X y (-5, 3) para la reflexión respecto al eje Y, y explica claramente el proceso.	El grupo realiza correctamente una de las reflexiones y explica el proceso, pero comete un error menor en la otra reflexión.	El grupo refleja los puntos pero con errores significativos en las coordenadas resultantes o en la explicación.	El grupo no logra reflejar correctamente el punto en torno a ninguno de los ejes y no proporciona una explicación adecuada del proceso.
Porcentajes de logro obtenidos	80% (4 grupos)	20% (1 grupo)		
Pregunta B (n=5)				
¿Cuáles son las coordenadas del punto Q = (-3, 4) si se refleja en torno a la recta x = 2? ¿Y en torno a la recta y = -1?. Expliquen usando el siguiente plano cartesiano:				
Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo realiza y explica correctamente las reflexiones del punto Q en torno a las rectas dadas, obteniendo Q' = (8, 4) para la reflexión respecto a la recta x = 2 y Q' = (-3, -6) para la reflexión respecto a la recta y = -1.	El grupo refleja correctamente el punto Q en torno a una de las rectas y proporciona una explicación adecuada, pero comete un error en la reflexión o la explicación para la otra recta.	El grupo entiende el concepto de reflexión pero comete errores en las coordenadas o en la explicación del proceso.	El grupo no logra reflejar correctamente el punto Q en torno a las rectas dadas ni explica adecuadamente el proceso.
Porcentajes de logro obtenidos	40% (2 grupos)	20% (1 grupo)		40% (2 grupos)
Pregunta C (n=5)				
¿Cuáles serán las coordenadas finales del punto R = (-7, 5) si hacemos dos simetrías, primero en torno el eje X, y luego, en torno el eje Y? ¿Qué relación podría tener con una rotación en 180° del punto R en torno al origen del plano cartesiano? Expliquen usando del siguiente plano cartesiano:				

Descriptores de logro	Óptimo	Satisfactorio	Base	Insuficiente
Indicadores	El grupo realiza con precisión las reflexiones sucesivas en torno a los ejes, obtiene las coordenadas finales de R' correctamente y explica con claridad que el resultado es equivalente a una simetría central respecto al origen, equivalente a una rotación de 180°	El grupo calcula correctamente las coordenadas finales de R' y establece una relación con la simetría central respecto al origen, aunque la explicación podría carecer de algunos detalles técnicos o tener pequeñas imprecisiones.	El grupo obtiene las coordenadas finales de R' con errores menores y muestra una comprensión básica de que el resultado es similar a la simetría central respecto al origen, pero la explicación no es completamente correcta o falta claridad.	El grupo no calcula correctamente las coordenadas finales de R' y no logra establecer la relación entre las reflexiones sucesivas y la simetría central respecto al origen.
Porcentajes de logro obtenidos		20% (1 grupo)		80% (4 grupos)

ANEXO B.9: clase 10. Control de simetrías

El control de simetrías aplicado en la clase 10, cuyos resultados se encuentran en la Tabla B.9, incluyó cuatro preguntas orientadas a evaluar la habilidad de los estudiantes para realizar reflexiones de puntos y figuras según los ejes dados, tanto pictóricamente como de manera simbólica. Además, se valoró la capacidad para determinar el eje de reflexión entre la imagen y la preimagen de dos figuras y para realizar reflexiones de figuras con respecto al origen del plano cartesiano.

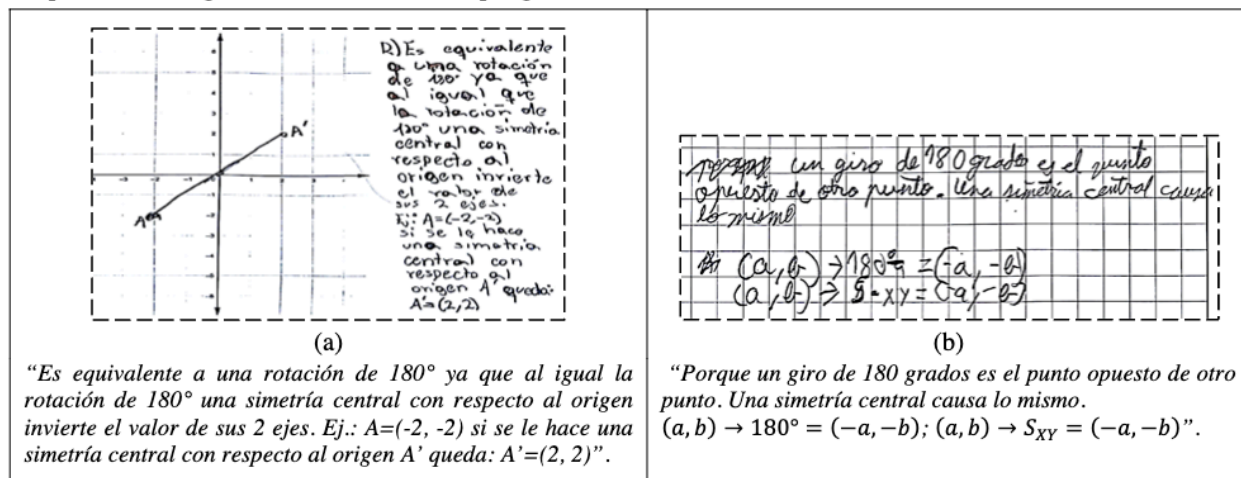
Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes logró un desempeño óptimo o satisfactorio en todas las preguntas, cumpliendo con los indicadores de evaluación establecidos para este tema. Esto refleja una notable mejora en dos áreas clave identificadas como debilidades en clases anteriores: la realización de simetrías de puntos y figuras según los ejes del plano cartesiano, aplicando transformaciones algebraicas en lugar de soporte gráfico, y la habilidad para determinar y utilizar el eje de reflexión entre una imagen y su preimagen.

La última pregunta del control desafiaba a los estudiantes a argumentar y comunicar la equivalencia entre una doble reflexión respecto a los ejes cartesianos y una rotación de 180° con centro en el origen. Los resultados fueron alentadores, con muchos estudiantes ilustrando esta equivalencia mediante dibujos o gráficos. Por ejemplo, el estudiante 16 explicó que la simetría central respecto al origen invierte los valores de ambos ejes, análogo a las transformaciones en una rotación de 180° , como se muestra en la Figura B.9.

Estas respuestas evidencian un entendimiento avanzado de los conceptos de simetría y rotación, destacando el uso intencionado y explícito de elementos como ejes de simetría y ángulos de rotación. En particular, el estudiante 3 mostró una habilidad notable en el uso de notación y vocabulario matemático para describir la rotación de 180° con centro en el origen y la simetría central, como se observa en la Figura B.9. Su trabajo refleja un nivel avanzado de comprensión y aplicación de estos conceptos geométricos, situándolo en el nivel 3 de clasificación del Modelo de Van Hiele

Figura B.9

Respuestas de algunos estudiantes en la pregunta 5 del control N°3



Nota. (a) Respuesta 5 estudiante 16 y (b) respuesta 5 estudiante 3.

Tabla B.9

Resultados control de simetrías – clase 10

Pregunta 1 (n=20)		
Considera el punto $(3, -5)$. Responde lo siguiente:		
i. ¿Cuáles serían sus nuevas coordenadas si se refleja respecto al eje X?		
ii. ¿Y si se refleja respecto al eje Y?		
	Si	No
El estudiante identifica que en una rotación respecto al eje X el valor de la coordenada y cambia a su opuesto y el valor de la coordenada x se mantiene igual, resultando en $(3, 5)$.	95% 19	5% 1
El estudiante reconoce que en una rotación respecto al eje Y el valor de la coordenada x cambia a su opuesto y el valor de la coordenada y se mantiene igual, resultando en $(-3, -5)$.	100% 20	
Pregunta 2 (n=20)		
El punto $F = (-6, -3)$ se refleja y el resultado es el punto $F' = (-6, 3)$.		
i. ¿Qué eje del plano cartesiano se utilizó para reflejar el punto F?		
ii. ¿Cuál es el punto simétrico del punto $Q = (5, -9)$ respecto al eje encontrado en i)?		
	Si	No
El estudiante determina que para el punto F, la coordenada y se invierte mientras que la x se mantiene, identificando correctamente el eje X como el eje de reflexión.	100% 20	
El estudiante calcula el punto simétrico de Q aplicando la misma lógica de inversión de la coordenada y, concluyendo que el punto simétrico es $(5, 9)$.	80% 16	20% 4
Pregunta 3 (n=20)		
Se tiene un triángulo con vértices en $A = (-2, 0)$, $B = (1, -2)$ y $C = (2, 4)$. Al reflejar este triángulo respecto a una recta, el punto B se transforma en $B' = (5, -2)$.		
i. ¿Cuál es la recta que se usó para la reflexión? Escríbela algebraicamente.		
ii. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A' y C' , resultantes de la misma reflexión?		
Si el triángulo ABC original se le aplica otra reflexión y el vértice C ahora tiene como simétrico el punto $C'' = (2, -6)$.		
iii. ¿Cuál es la recta que se usó para esta segunda reflexión? Escríbela algebraicamente.		
iv. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A'' y B'' tras esta nueva reflexión?		
	Si	No
El estudiante identifica correctamente la línea vertical $x = 3$ como la recta de reflexión basándose en la igualdad de las distancias horizontales de B a B' .	90% 18	10% 2
El estudiante utiliza la recta de reflexión $x = 3$ para hallar $A' = (8, 0)$ y $C' = (4, 4)$, aplicando la distancia igual pero opuesta desde la línea a los nuevos puntos.	80% 16	20% 4
El estudiante identifica correctamente la línea horizontal $y = -1$ como la recta de reflexión para obtener C'' .	80% 16	20% 4
El estudiante aplica la reflexión sobre la recta $y = -1$ para determinar las coordenadas de $A'' = (-2, -2)$ y $B'' = (1, 0)$.	70% 14	30% 6

Pregunta 4 (n=20)		
Demuestra por qué una simetría central con respecto al origen del plano cartesiano es equivalente a una rotación de 180° con centro en el origen.		
	Si	No
El estudiante explica que la simetría central respecto al origen cambia ambas coordenadas a sus opuestos.	65% 13	35% 7
El estudiante puede mostrar con un dibujo o gráfico que el efecto de la simetría central sobre un punto es equivalente a rotarlo 180° alrededor del origen.	95% 19	5% 1

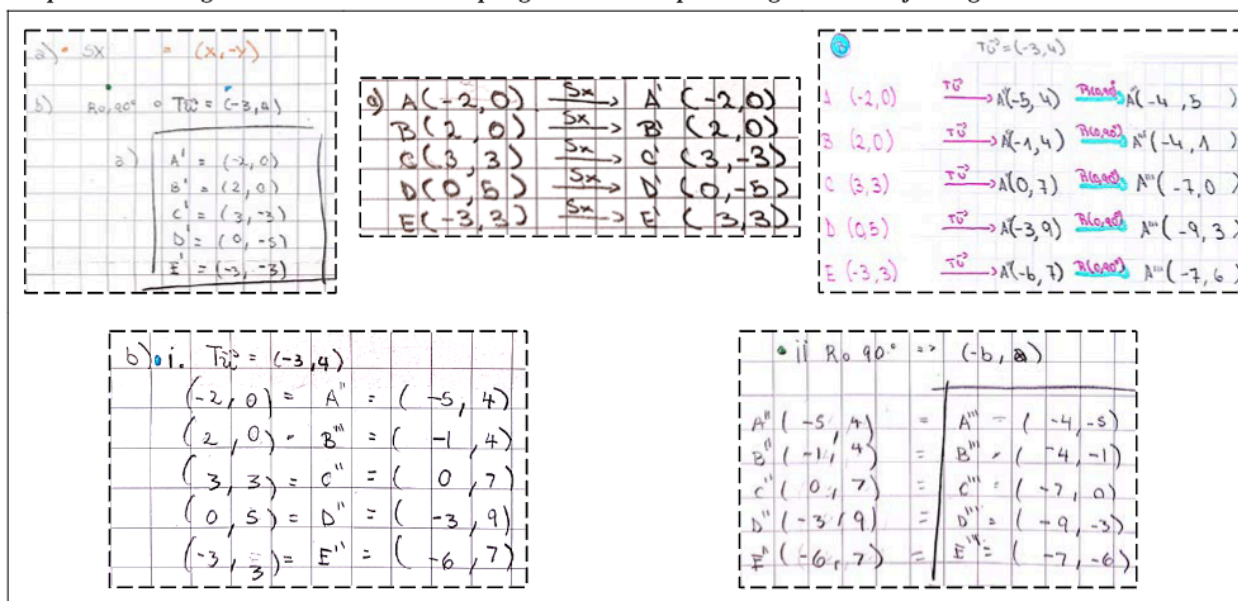
ANEXO B.10: Prueba global del eje de geometría

La segunda prueba global del semestre, enfocada en el eje de geometría, evaluó los contenidos de raíces cuadradas (como prerrequisito para el teorema de Pitágoras), el teorema de Pitágoras y las transformaciones isométricas incluyendo traslaciones, rotaciones y simetrías. Esta prueba, que constó de siete preguntas, cinco de ellas dedicadas específicamente a las isometrías, se diseñó para evaluar las habilidades desarrolladas por los estudiantes durante la secuencia de clases de este artículo, basadas en las Bases Curriculares del Currículum de Enseñanza Media en Chile para octavo básico en el eje de geometría.

De acuerdo con los resultados presentados en la Tabla B.10, que incluyen una muestra de 12 estudiantes, todos ellos alcanzaron un desempeño óptimo en las preguntas relacionadas con isometrías. Este logro evidenció una mejora significativa en habilidades clave en el aprendizaje geométrico, de acuerdo con el Modelo de Van Hiele. Estas habilidades incluyen el uso de notación y vocabulario matemáticos asociados a las isometrías (Nivel 2 del Modelo), como P , P' , $T_{\vec{v}}$, S_e y $R_{(0,\theta)}$, y la capacidad de establecer relaciones generales en las coordenadas de un punto, su imagen y los elementos específicos de cada transformación (Nivel 3). Además, se observó una mejor habilidad para argumentar y comunicar las propiedades y aplicaciones de las isometrías en contextos prácticos y matemáticos.

Figura B.10

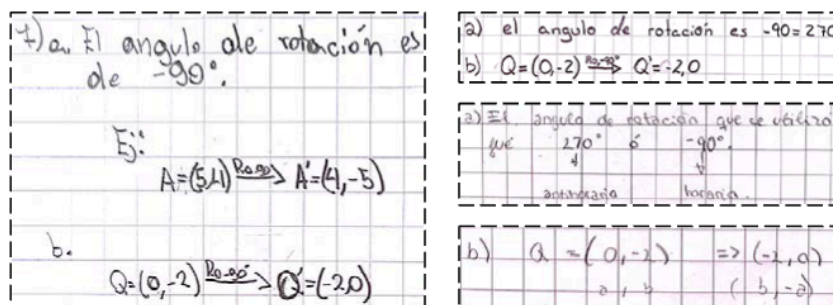
Respuestas de algunos estudiantes en la pregunta 4 de la prueba global del eje de geometría



Como se observa en la Figura B.10, en la pregunta 4 de la prueba, los estudiantes demostraron su competencia en el uso eficaz de la notación y el vocabulario matemático específico de cada isometría. Lograron desenvolverse en un ámbito puramente analítico, aplicando las estructuras algebraicas de las isometrías aprendidas y reforzadas en las clases, para determinar las nuevas coordenadas de los vértices de un pentágono ABCDE.

Figura B.11

Respuestas de algunos estudiantes en la pregunta 7 de la prueba global del eje de geometría



En la pregunta 7, tal como se observa en la Figura B.11, los estudiantes demostraron su capacidad para reconocer el ángulo de rotación entre un polígono y su imagen respecto al origen del plano cartesiano, partiendo solamente de un par de vértices: el original y el rotado. Utilizaron la estructura algebraica de una rotación, adquirida y reforzada en las clases, para encontrar la rotación de un punto cualquiera en el plano.

Los resultados obtenidos en la secuencia de clases y reflejados en las evaluaciones demuestran el buen desempeño de las estrategias didácticas y de enseñanza implementadas en el curso. Estos resultados no solo destacan la efectividad de la secuencia didáctica, sino también subrayan la importancia de la retroalimentación continua y las actividades de aprendizaje basadas en situaciones de contexto científico y matemático. La implementación de la TSD ha demostrado ser especialmente beneficiosa, colocando a los estudiantes en el centro del proceso educativo y promoviendo un aprendizaje activo y significativo.

El uso del *ticket* de salida ha demostrado ser una herramienta valiosa para la retroalimentación oportuna y la detección temprana de errores. Esta estrategia ha permitido ajustar los procesos de enseñanza de manera más efectiva y responder a las necesidades específicas de aprendizaje de los estudiantes. Al detectar y abordar los errores en las etapas iniciales, se ha mejorado la comprensión de los conceptos y se ha evitado la propagación de malentendidos.

El modelado y la ejercitación de cada tema han sido igualmente cruciales para reforzar el aprendizaje significativo y aumentar la confianza de los estudiantes en sus habilidades de resolución de problemas. Estas actividades han permitido a los estudiantes practicar y aplicar los conceptos geométricos en una variedad de contextos, lo que ha contribuido a una comprensión más profunda y a una mayor retención de los conocimientos.

En conjunto, estas estrategias han fortalecido la comprensión y aplicación de conceptos geométricos por parte de los estudiantes, mejorando su desempeño académico y su confianza en las matemáticas. Estas prácticas pedagógicas reflejan una aproximación integral al aprendizaje, en que los estudiantes no solo adquieren conocimientos, sino que también desarrollan habilidades críticas de pensamiento, análisis y resolución de problemas, fundamentales para su éxito educativo y personal.

Tabla B.10

Resultados de las preguntas de transformaciones isométricas de la prueba global de geometría

Pregunta 3 (n=12)		
Realiza al triángulo ABC las siguientes transformaciones isométricas en el plano cartesiano.		
a) Reflexión respecto del eje Y.		
b) Rotación con centro en (1, 1) y ángulo de -90° .		
c) Traslación según el vector $\vec{u} = (-5, -1)$.		
	Si	No

El estudiante realiza correctamente la reflexión del triángulo ABC respecto del eje Y, obteniendo $A'(-2, 1)$, $B'(-5, 2)$ y $C'(-3, 4)$.	92% 11	8% 1
El estudiante ejecuta con precisión la rotación del triángulo ABC con centro en $(1, 1)$. y ángulo de -90° , resultando en $A'(1, 0)$, $B'(2, -3)$ y $C'(4, -1)$.	75% 9	25% 3
El estudiante aplica adecuadamente la traslación del triángulo ABC según el vector $\vec{u} = (-5, -1)$ obteniendo $A'(-3, 0)$, $B'(0, 1)$ y $C'(-2, 3)$.	84% 10	16% 2

Pregunta 4 (n=12)

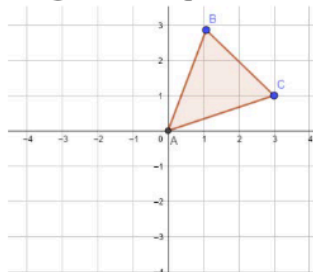
Hallar las coordenadas obtenidas, si a un pentágono de vértices $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(3, 3)$, $D(0, 5)$ y $E(-3, 3)$ se le aplica:

- a) S_x
b) $R_{(0,90^\circ)} \circ T_{\vec{u}=(-3,4)}$

	Si	No
El estudiante identifica y aplica correctamente la simetría respecto al eje X al pentágono, obteniendo $A'(-2, 0)$, $B'(2, 0)$, $C'(3, -3)$, $D'(0, -5)$ y $E'(-3, -3)$.	100% 12	
El estudiante identifica y aplica correctamente una traslación de acuerdo con el vector \vec{u} obteniendo $A''(-5, 4)$, $B''(-1, 4)$, $C''(0, 7)$, $D''(-3, 9)$ y $E''(-6, 7)$.	75% 9	25% 3
El estudiante identifica y aplica correctamente una rotación con centro en el origen y ángulo de 90° a los vértices A'' , B'' , C'' , D'' y E'' obteniendo $A'''(-4, -5)$, $B'''(-4, -1)$, $C'''(-7, 0)$, $D'''(-9, -3)$ y $E'''(-7, -6)$.	75% 9	25% 3

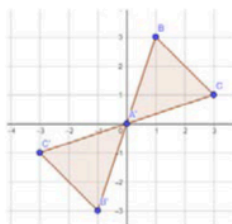
Pregunta 5 (n=12)

Manuel y Carolina están trabajando en la unidad de geometría y están realizando las transformaciones isométricas en el plano cartesiano del triángulo ABC que se muestra en la figura.

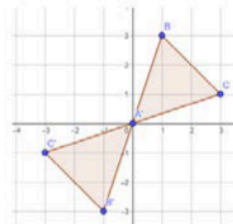


Los resultados de cada uno fueron:

Manuel

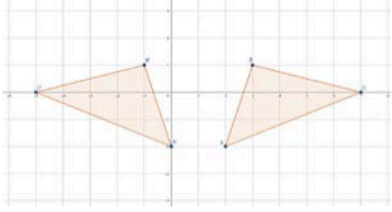


Carolina



Si ambos hicieron una transformación distinta, ¿cuáles pudieron ser las transformaciones que hizo cada uno? Justifica.

	Si	No
El estudiante analiza y concluye que Manuel podría haber realizado una rotación con centro en el origen y ángulo de 180° o una simetría central con respecto al origen.	100% 12	

El estudiante analiza y concluye que Carolina podría haber realizado una rotación con centro en el origen y ángulo de 180° o una simetría central con respecto al origen.	92% 11	8% 1
<p align="center">Pregunta 6 (n=12)</p> <p>Al triángulo ABC se le aplicó una reflexión axial obteniendo el triángulo A'B'C'. Halla el eje de simetría.</p> 		
	Si	No
El estudiante determina con precisión el eje de simetría de la reflexión axial aplicada al triángulo ABC como $x = 1$, basándose en la comparación de las coordenadas de los puntos originales y sus imágenes	100% 12	
<p align="center">Pregunta 7 (n=12)</p> <p>Al polígono de vértices A(5, 4), B(3, 4), C(2, 3), D(2, 1), E(4, 1) y F(5, 2) se le ha aplicado una rotación con centro en el origen del plano, obteniendo el polígono de vértices A'(4, -5), B'(4, -3), C'(3, -2), D'(1, -2), E'(1, -4) y F'(2, -5).</p> <p>a) Halla el ángulo de rotación.</p> <p>b) Halla las coordenadas del punto Q', si se sabe que Q(0, -2) se rota con el ángulo encontrado en a) con centro en el origen.</p>		
	Si	No
El estudiante calcula correctamente el ángulo de rotación como 270° o -90° para la rotación del polígono en el origen.	100% 12	
El estudiante determina con exactitud las coordenadas del punto Q' como (-2, 0) después de aplicar la rotación con el ángulo encontrado en el inciso anterior	84% 10	16% 2

ANEXO C: Referente teórico disciplinar. Transformaciones isométricas

En el marco teórico–disciplinar que esta propuesta didáctica buscó establecer, es fundamental incorporar algunos conceptos desde una perspectiva epistemológica. Un concepto clave es el de transformación en geometría, que está intrínsecamente ligado a la idea de cambio (Alsina et al., 1997; Fernández, 2007). Al aplicar una transformación a un objeto o figura, se modifican uno o más de sus atributos. Es importante destacar que hay diferentes tipos de transformaciones, algunas de las cuales tienen la capacidad de alterar el tamaño o la forma de un objeto o figura.

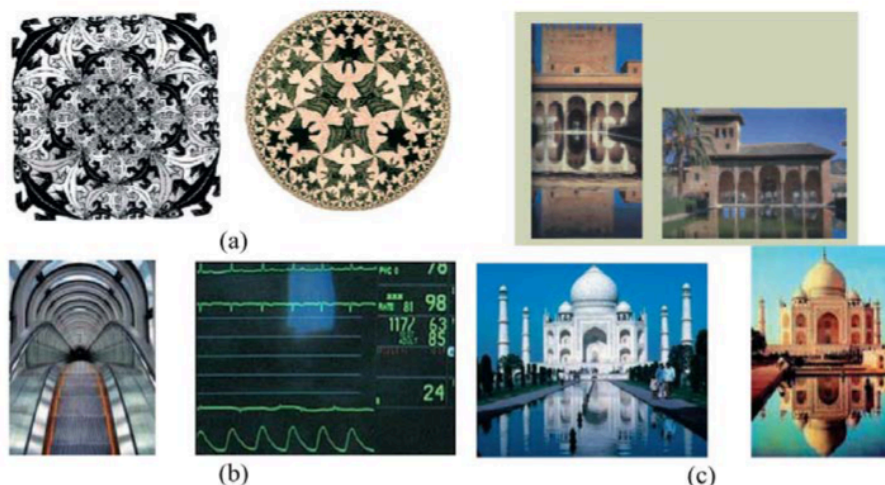
Al analizar transformaciones que alteran el tamaño de un objeto, como las dilataciones o ampliaciones, se constata que la forma del objeto no se mantiene intacta. Por otro lado, existen transformaciones, como las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones, que no modifican ni el tamaño ni la forma del objeto en cuestión (Alsina et al., 1997).

Cabe destacar que las transformaciones geométricas que preservan tanto las distancias (esto es, el tamaño) como los ángulos (o sea, la forma) reciben el nombre de isometrías o movimiento rígido. Así, las traslaciones, reflexiones y rotaciones se clasifican como transformaciones isométricas (Chuaqui y Riera, 2012). Estos tipos de transformaciones son esenciales en el ámbito de la geometría y establecen una base para entender cómo los objetos pueden alterarse y moverse, conservando a la vez ciertas propiedades fundamentales (Alsina et al., 1997).

Es difícil encontrar nociones matemáticas con una conexión más directa al mundo real que las isometrías. Sin lugar a duda, el origen de la observación de elementos geométricos por parte del ser humano reside en la naturaleza. Este vínculo se destaca no solo por la abundancia de objetos, animales y plantas en los que se observan traslaciones, rotaciones y reflexiones, sino también por su relevancia en mostrar el lado matemático de la naturaleza (Fernández, 2007). Esto puede convencer incluso a los más escépticos de que la geometría puede transformarse en un arte de gran belleza, y así, fomentar aprendizajes significativos y profundos. Para ilustrar esta conexión, se muestra la Figura C.1, en que se presentan ejemplos de isometrías en la naturaleza, el arte, la arquitectura y la vida cotidiana.

Figura C.1

Isometrías en nuestro entorno



Nota. Diferentes isometrías en el entorno. (a) Embaldosado del plano de Escher en que los elementos rotan hacia el centro o hacia las fronteras de la pintura. (b) Frisos en escaleras mecánicas o en los monitores de un hospital en que se observan traslaciones. (c) Dos vistas del Taj Mahal, India, en que el agua actúa como espejo dando como resultado una imagen simétrica. Adaptada de *Isometría en nuestro entorno*, de Fernández, 2007.

En vista de lo expuesto, la secuencia de clases se enfoca en las transformaciones de traslaciones, simetrías y rotaciones en el plano cartesiano. Para los estudiantes de octavo básico, se emplea la geometría analítica, una geometría que hace uso de coordenadas. Este enfoque, desarrollado por René Descartes y Pierre de Fermat en el siglo XVII, fue concebido con el objetivo de resolver problemas geométricos mediante su correlación con el álgebra.

Conforme a lo anteriormente planteado, se procederá a definir los conceptos matemáticos de isometría, traslaciones, reflexiones y rotaciones en el plano cartesiano (Becerra, 2015; Chuaqui y Riera, 2012; Estruch et al., 2018; Lima, 1996).

Isometría

Una isometría es una biyección o colineación del plano en sí mismo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que conservan distancias, ángulos y direcciones, es decir, si para cualesquiera dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^2$ se verifica que:

$$d(F(P), F(Q)) = d(P, Q)$$

Si $P \in \mathbb{R}^2$, se denomina homólogo de P al punto P' , único, que verifica $P' = F(P)$. En ocasiones a P' se le llama transformado, trasladado, simétrico, rotado, imagen, ..., dependiendo del tipo de transformación isométrica.

Si las isometrías conservan la orientación de la figura original o preimagen, se denomina isometría directa, y en caso contrario, isometría inversa.

Traslación

Sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Una traslación de vector \vec{v} en \mathbb{R}^2 es una colineación del plano en sí mismo $T_{\vec{v}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T_{\vec{v}}(\overrightarrow{OP}) = \vec{v} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'} \leftrightarrow \overrightarrow{OP'} = \vec{v} + \overrightarrow{OP}$$

$$T_{\vec{v}}(P) = P' \leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = \vec{v} \leftrightarrow P' = \vec{v} + P$$

La traslación $T_{\vec{v}}$ es una isometría directa.

Desde la perspectiva de la geometría analítica, una traslación puede definirse del siguiente modo:

Si un punto $P = (x, y)$ se traslada según $T_{\vec{v}}$ con $\vec{v} = (a, b)$, su punto trasladado será:

$$T_{\vec{v}}(P) = P' = \vec{v} + P = (a + x, b + y)$$

Reflexión o Simetría Axial

La simetría axial (o reflexión) respecto al eje o recta L es la isometría inversa del plano, que al punto P le hace corresponder el punto P' , de manera que el eje L es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

En una reflexión, los únicos puntos que no sufren una transformación son los puntos del eje L .

Desde el punto de vista de la geometría analítica, cuando se quiere realizar una simetría axial respecto de los ejes coordenados se tienen las transformaciones⁴ de la Tabla C.1.

⁴ La imagen de un punto reflejado respecto al eje X se obtiene haciendo $m = 0$ y $n = 0$ en la expresión (1).

Tabla C.1

Simetría axial respecto a los ejes coordenados

Simetría Axial	$P = (a, b)$
Respecto al eje X	$P' = (a, -b)$
Respecto al eje Y	$P'' = (-a, b)$

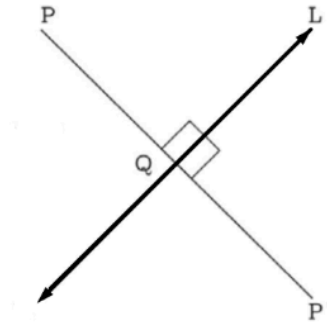
Si interesa realizar una simetría axial a un punto $P = (a, b)$ respecto a cualquier recta de la forma $y = mx + n$, la transformación será el punto:

$$P' = (P'_x, P'_y) = \frac{1}{1+m^2} (a - am^2 + 2bm - 2mn, 2am - b + bm^2 + 2n) \quad (1)$$

Donde $P'_x = P' \cdot \hat{i}$ e $P'_y = P' \cdot \hat{j}$, con $a, b, m, n \in \mathbb{R}$ y \hat{i} y \hat{j} vectores canónicos en \mathbb{R}^2 .

Demostración:

Sean $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $L \equiv mx - y + n = 0$ la ecuación de una recta en \mathbb{R}^2 , con $a, b, m, n \in \mathbb{R}$. Sea P' la imagen simétrica de P respecto de la recta L .

Figura C.2Esquema demostración punto simétrico de P 

Nota: Fuente: Adaptado de Puntos reflejados, de Chuaqui & Riera, 2012.

La recta $\overleftrightarrow{PP'}$ es secante a la recta L en el punto Q . Además, como la recta L es mediatriz del segmento $\overline{PP'}$, entonces $\overleftrightarrow{PP'} \perp L$ y $\overline{PQ} = \overline{QP'}$; véase Figura C.2. Entonces, el punto P' puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} P' &= P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP'} = P + 2\overrightarrow{PQ} = P + 2(Q - P) \\ P' &= 2Q - P \end{aligned} \quad (2)$$

Como $\overleftrightarrow{PP'} \perp L$, entonces el vector director de $\overleftrightarrow{PP'}$ es igual a la normal \vec{n} de la recta L , es decir, $\vec{n} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$. Como $P \in \overleftrightarrow{PP'}$, entonces la ecuación continua de la recta $\overleftrightarrow{PP'}$ es:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{PP'} &\equiv \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{-1} \\ \overleftrightarrow{PP'} &\equiv x + my - (a + bm) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Como el punto Q es la intersección entre la recta $\overleftrightarrow{PP'}$ y L. Entonces, las coordenadas de Q son la solución del siguiente sistema para x y y:

$$\begin{cases} \overleftrightarrow{PP'} \equiv x + my - (a + bm) = 0 \\ L \equiv mx - y + n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La solución del sistema en (4) es:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + m^2} \begin{pmatrix} a + bm - mn \\ am + bm^2 + n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Donde $Q_x = Q \cdot \hat{i}$ e $Q_y = Q \cdot \hat{j}$ y \hat{i} y \hat{j} vectores canónicos en \mathbb{R}^2 .

Reemplazando la expresión (5) en la expresión (2) se obtiene:

$$P' = \frac{2}{1 + m^2} \begin{pmatrix} a + bm - mn \\ am + bm^2 + n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$P' = (P'_x, P'_y) = \frac{1}{1 + m^2} (a - am^2 + 2bm - 2mn, 2am - b + bm^2 + 2n)$$

Q. E. D. ■

Si se realiza una simetría axial a un punto $P = (a, b)$ respecto de una recta $y = k$, las coordenadas de la imagen P' estarán dadas haciendo $m = 0$ y $n = k$ en la expresión (1). Por lo tanto, $P' = (a, 2k - b)$, para $k \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, si se realiza una simetría axial a un punto $P = (a, b)$ respecto a una recta⁵ $x = k$, las coordenadas de la imagen serán: $P' = (2k - a, b)$, para $k \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Si se tiene una recta de la forma $x = k$ en el plano y un punto $P(a, b)$, entonces su reflejo respecto a esa recta será un punto P' de coordenadas (x, b) . Si trazamos el segmento $\overline{PP'}$, este se interceptará con la recta $x = k$ en un punto M de coordenadas (k, b) .

M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ porque se trata de una simetría respecto a una recta, y la distancia desde el punto P hasta el punto M debe ser la misma que del punto P' al punto M. Es decir, algebraicamente se obtiene:

$$\begin{aligned} d(\overline{PM}) &= d(\overline{P'M}) \\ a - k &= k - x \\ x &= 2k - a \end{aligned}$$

Luego, el punto P' tiene coordenadas $(2k - a, b)$

Q. E. D. ■

Por lo tanto, cuando se busca el simétrico de un punto respecto a rectas horizontales o verticales, las coordenadas de sus imágenes respecto a dichas rectas se representan en la Tabla C.2:

⁵ La recta $x = k$, con $k \in \mathbb{R}$, no es una función. Por lo tanto, la expresión en (1) no permite obtener la imagen del punto $A = (a, b)$ haciendo una reflexión con respecto a dicha recta.

Tabla C.2

Simetría axial respecto a rectas verticales o horizontales

Simetría Axial	$P = (a, b)$
Respecto al eje $y = k$	$P' = (a, 2k - b)$
Respecto al eje $x = k$	$P' = (2k - a, b)$

Si se realiza una simetría axial al punto $P = (a, b)$ respecto de una recta $y = x$, las coordenadas de la imagen P' estarán dadas haciendo $m = 1$ y $n = 0$ en la expresión (1). Por lo tanto, $P' = (b, a)$.

Por último, si se realiza una simetría axial al punto $P = (a, b)$ respecto de una recta $y = -x$, las coordenadas de la imagen P' estarán dadas haciendo $m = -1$ y $n = 0$ en la expresión (1). Por lo tanto, $P' = (-b, -a)$.

Rotación

Sea $O \in \mathbb{R}^2$ y α es un ángulo orientado. La rotación de centro O y amplitud α es una isometría directa del plano $R_{O,\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$R_{O,\alpha}(P) = P' \leftrightarrow d(R_{O,\alpha}(P), R_{O,\alpha}(P')) = d(P, P') \wedge \angle POP' = \alpha$$

El único punto que no gira (se mantiene invariante) es el centro de rotación O .

Desde el enfoque de la geometría analítica, si se aplica una rotación a un punto $P = (a, b)$ en torno al origen de coordenadas y de ciertos ángulos se tienen las transformaciones de la Tabla C.3.

Tabla C.3

Rotación en torno al origen para algunos ángulos notables

Rotación en torno al origen	90°	180°	270°	360°
	-270°	-180°	-90°	-360°
$P = (a, b)$	$P' = (-b, a)$	$P'' = (-a, -b)$	$P''' = (b, -a)$	$P^{iv} = (a, b) = P$

Una rotación en 180° entorno al origen se conoce como simetría respecto al origen $(0,0)$ o simetría central respecto al origen del plano cartesiano.

Se debe tomar en cuenta que se han presentado únicamente aquellas definiciones que están directamente relacionadas con las estructuras algebraicas, pero que no se especifican en la propuesta de enseñanza-aprendizaje para los estudiantes (en las guías de trabajo), dado que no son pertinentes a su nivel curricular.

ANEXO D.1: Transcripción entrevista a la jefa del departamento de matemática

En tu perspectiva de jefa de departamento, ¿cuáles son las orientaciones que propone el colegio para la enseñanza de las matemáticas?

En general en la enseñanza de la asignatura se busca lo siguiente:

- Fomentar el pensamiento crítico.
- Generar constantes espacios de reflexión acerca del propio quehacer.
- Fomentar la resolución de problemas usando el razonamiento matemático y a través del aprendizaje cooperativo.
- Generar una disciplina de trabajo en la sala que permita fortalecer la autonomía, con un ambiente donde los y las estudiantes se sientan en un espacio seguro para resolver sus dudas y donde el error se use como una forma de aprendizaje.
- Realizar actividades que atiendan a las diversidades presentes en el grupo curso.
- Constante retroalimentación del proceso de aprendizaje que permita a los/as estudiantes identificar qué mejorar y de qué forma hacerlo.

Con relación a la pregunta anterior, y en tu mirada como profesora y miembro de la comunidad, ¿cuáles son las fortalezas y debilidades de los procesos formativos que promueve el colegio?

Una de las grandes fortalezas es el equipo de profesores quienes están en constante coordinación y con una línea clara de trabajo. Además, los grupos cursos no tienen problemas importantes de disciplina por lo que en la mayoría de los casos el ambiente de trabajo es muy bueno para los procesos de aprendizaje.

Quiero considerar que los/as estudiantes vienen con un capital cultural que aporta a esto último (la mayoría de los papás son personas que tienen estudios universitarios y que tienen posibilidad de acceder al pago de clases particulares, por ej.)

En relación con esto último, la cultura desde casa es muy exitista por lo que a la mayoría de los/as estudiantes les importan mucho sus calificaciones, lo que en muchos casos dificulta los procesos formativos cuando no hay una nota asociada. Esto se refleja directamente en la gran cantidad de estudiantes que sufren distintos niveles de estrés y/o trastornos ansiosos (generando mucha desmotivación).

Esto se suma a la gran diversidad de estudiantes presentes en este colegio, desde un punto de vista académico. Diversidad natural, pero a la que siento yo, no sabemos responder correctamente.

Una de las debilidades que identifiqué es que las/os profesoras no tienen una formación académica en cuanto a la diferenciación en el aula por lo que a muchos/as les dificulta el trabajo con estudiantes que tienen necesidades educativas especiales. Y la cantidad de personas especialistas (psicopedagogos/educadores diferenciales) son muy pocos para la cantidad de estudiantes. Soy consciente del intenso trabajo de este equipo y de los esfuerzos de los profesores para poder atender a todas las necesidades, pero falta mucho apoyo.

La mayor debilidad que observo es los diversos objetivos a los que apunta el colegio y se evidencia a la hora de tener que cumplir con dos planes diferentes: el plan nacional y el de Bachillerato Internacional. A esto se suman los requerimientos que implica ser un colegio subvencionado por estado alemán (por ej., en enseñanza tener asignaturas de Bachillerato en alemán, como historia y biología). Esto se traduce en una alta carga académica que implica tener horarios muy extensos (ej., en segundo medio salen casi todos los días a las 5 de la tarde).

En cuanto a la asignatura de matemáticas también tiene un fuerte impacto. Desde segundo medio, hasta inicios de cuarto medio, el trabajo se enfoca en los exámenes del Bachillerato que tienen una lógica muy distinta a la PAES. Un ej. concreto es el uso de calculadora. En los cursos de Bachillerato está permitido trabajar con medios tecnológicos porque el objetivo es desarrollar habilidades de pensamiento más

profundas, donde el foco está en la resolución de problemas, la argumentación, la investigación, la comunicación matemática, "el demostrar que entiendo lo que estoy haciendo".

Entonces, al terminar este proceso, a fines de mayo recién se comienza a preparar la PAES donde no se puede usar calculadora y donde se evalúan habilidades distintas. Y es muy complejo hacer ese "switch" en tan poco tiempo. En especial con estudiantes que tienen grandes dificultades en la asignatura.

Por supuesto que esto genera impacto en los resultados.

A pesar de todas esas dificultades los resultados son buenos y eso demuestra el alto potencial que tienen los/as estudiantes de este colegio y también lo positivo de la forma de entender la educación que tiene el sistema del Bachillerato. Si estuviera mejor implementado creo que los resultados mejorarían considerablemente.

ANEXO D.2: Transcripción entrevista al profesor jefe del 8°A***¿Cómo describirías las formas en que te relacionas con los estudiantes del 8°A en el contexto de la clase de matemáticas?***

Con este curso siempre he tratado de mantener un vínculo afectivo con los y las estudiantes, dado que creo y comprendo que una relación más horizontal puede fomentar un espacio de mayor confianza para el aprendizaje y la matemática por parte de ellos y también por parte mía como desde la enseñanza. Entonces una de las relaciones que siempre intento generar es de que ellos me pueden preguntar sin vergüenza porque siempre voy a intentar hacerle la respuesta. Y también, tratar de mantener una constante comunicación para que ellos puedan sentirse respaldados.

¿Cuál dirías que es tu metodología de enseñanza? ¿Cómo se materializa en tu clase de matemática?

Con el tema de la metodología de enseñanza o cómo se materializa en tu clase, no sé si metodología, porque no lo llamaría metodología, pero si trato de aferrarme hartito al tema de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, dado que en mi formación me fomentaron hartito esta teoría, por lo tanto, siempre intento de establecer situaciones a-didácticas, evidentemente no resultan claramente, pero siempre trato de partir las clases o temas nuevos estipulando problemas iniciales, cosa que puede generar algún conflicto cognitivo, que traten de buscar estrategia de resolución y de alguna u otra forma se vayan desenvolviendo a partir de la reflexión y una institucionalización del concepto y que se pueda materializar en un aprendizaje. Evidentemente si es que este aprendizaje llega a ser significativo o no se verá con el tiempo a ver cuánto es lo que perduran en el tiempo.

¿Cuál dirías que es tu metodología de evaluación? ¿Cómo se materializa en tu clase de matemática?

Respecto de la metodología de evaluación y cómo se materializa. En ese sentido me guio hartito por lo institucional con el tema de las evaluaciones sumativas, qué son en el tema de la calificación propiamente tal. Tenemos una política en el colegio donde tenemos que poner una nota de entre 0 y 100 con un porcentaje de progreso y un porcentaje de rendimiento. Sin embargo, siempre se está tratando de hacer una evaluación formativa o progresiva tanto que los estudiantes puedan comprender cuando se están equivocando o cuando lo están haciendo bien, donde sus compañeros y compañeras también puedan retroalimentarse, creando una micro comunidad científica evaluativa. Pero la idea es que ella se esté evaluando constantemente antes si es que las producciones que van generando en clases a partir de estos problemas de estos ejercicios son coherentes con el contenido, muestren el aprendizaje del contenido y si están resolviendo problemas o están cumpliendo el objetivo de la evaluación.

A tu juicio, ¿qué obstáculo (u obstáculos) para el aprendizaje de los estudiantes del 8°A puede(n) existir en el contexto de la clase de matemática? Da ejemplos concretos.

Con respecto a los obstáculos para el aprendizaje de los estudiantes del 8°A que existe en el contexto de las Matemáticas, creo que hay dos factores importantes que se destacan con claridad. Primero, es el de las creencias históricas y personales respecto del aprendizaje. Muchos de ellos creen que no son buenos en matemáticas, porque siempre les ha costado las matemáticas y/o porque sus padres son malos para las matemáticas, entonces ellos también son malos para las matemáticas; se ha ocurrido mucho, muchas veces me lo han evidenciado. Y el otro factor es que hay una falta de confianza importante; creo que eso también más allá de un obstáculo o de un paradigma con la matemática, tiene que ser un paradigma con el sistema escolar, ya que estamos sufriendo las mermas de la pandemia y evidentemente ese periodo de pandemia y encierro ha hecho que la retroalimentación haya sido menos efectiva porque ellos la tuvieron menos y porqué comprenden cada vez menos a qué se refiere la retroalimentación. Entonces les falta confianza dado que se necesitan un muy gran destacamiento de que ellos lo están haciendo bien y esto evidentemente les genera una dificultad en el transcurso, en el progreso y cómo ellos van entendiendo que van adquiriendo su aprendizaje.

¿Qué causas y efectos explican el obstáculo (u obstáculos) identificado(s) en relación con el aprendizaje de los estudiantes del 8°A? Da ejemplos concretos.

Qué causa y efecto explican el obstáculo identificado en relación con el aprendizaje de los estudiantes. Evidentemente lo respondí con la pregunta anterior, pero insisto en que hay una historia personal y familiar que lo están arrastrando (en relación con los estudiantes). Hay unos obstáculos que se están generando, no me atrevería a decir si epistemológicos o didácticos, porque eso de creer que son malos para las matemáticas porque siempre han sido malos para las matemáticas, yo siento que ha sido como una creencia y que se le ha ido alimentando y qué ha sido super difícil poder borrarlo. Y lo otro esto de también creo que también tiene que ser con algo medio quizás didáctico en el pasado que de repente les faltó la retroalimentación o no entienden la retroalimentación más allá de lo que es el resultado de la calificación, que no entienden cuando están haciendo las cosas bien y de repente dudan mucho de sí mismos si es que lo están haciendo bien y en el proceso también. Evidentemente, a lo mejor, una autocrítica es tratar de vincular a hacer una retroalimentación efectiva cosa de que se le genere una institucionalización mucho más empoderada o firme, pero que entiendan que la cosa lo están haciendo bien. Y eso lo evidenciamos constantemente en el transcurso de las clases, en el transcurso de las mismas evaluaciones donde repente ellos necesitan decir, por ejemplo, estudiante: "profe ¿3 más 2 es 5?", profesor: "sí, 3 más 2 es 5", alumno: "¿pero está seguro?", profesor: "sí, te estoy diciendo que 3 más 2 es 5". De repente puede tener buen resultado y lo han hecho varias veces, pero hay un tema de confianza que le está afectando hartito como en su trayectoria Y eso es preocupante para mí por lo menos.

